This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math
8588
95

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Digitized by Google

Math 858895

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

26 Feb., 1896.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

7433

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Ersten Städtischen Realschule zu Berlin. Ostern 1895.

Untersuchungen

über

Unikursalkurven dritter Ordnung.

Von

Dr. Hermann Linsenbarth.

Mit 4 Figuren.

BERLIN 1895.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1895. Programm Nr. 117.

Digitized by Google

~~VE .8786~~
Math 8588.95

HARVARD COLLEGE
FEB 23 1906
LIBRARY.
Haven fund.

052

Digitized by Google

Unikursalkurven nter Ordnung sind nach Clebsch solche, deren Koordinaten sich als rationale Funktionen nter Ordnung eines Parameters darstellen lassen. Die Fundamentaleigenschaft dieser Kurven besteht darin, vom Geschlecht $p = 0$ zu sein, d. h. die Maximalzahl von Doppelpunkten zu besitzen. Setzt man $n = 3$, so erhält man die Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Die Hauptaufgabe bei der Untersuchung dieser Kurven würde also darin bestehen, aus der allgemeinen Parameterdarstellung die Existenz eines Doppelpunktes nachzuweisen. Die direkte Methode, diese Aufgaben zu lösen, scheint bisher nirgends durchgeführt worden zu sein, da sie, wie Clebsch, Journal für Mathematik, Bd. 64 S. 48 zeigt, überflüssige Faktoren in die Gleichungen liefert. In der Abhandlung von Rosenow: Die Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, Breslau 1873, sind, ausgehend von der allgemeinen Parameterdarstellung und im Anschlufs an die Theorie der binären kubischen Formen, die Unikursalkurven dritter Ordnung ziemlich ausführlich behandelt. Auf S. 11 dieser Abhandlung wird zwar auf die direkte Methode hingewiesen; „aber man sieht, dafs sie selbst bei diesem verhältnismäfsig einfachen Beispiele zu nicht unbedeutenden algebraischen Schwierigkeiten führen würde". Diese direkte Methode ist nun, wie gezeigt werden soll, durchaus leicht zu behandeln und führt zu interessanten Ergebnissen, wobei auch die geometrische Bedeutung der gefürchteten überflüssigen Faktoren klar hervortreten wird. Aus der Parameterdarstellung ergiebt sich die Gleichung der Kurve in einer übersichtlichen Form, die zur Ableitung der Eigenschaften der Kurve noch nicht benutzt worden zu sein scheint. Besonders hervorzuheben ist dabei, dafs diese Gleichung die verschiedenartigsten Umformungen zuläfst, so dafs sie in der Form wirklich darstellbar ist, die für diese oder jene spezielle Aufgabe den Ausgangspunkt bilden mufs. Es ist nicht ausreichend, die Möglichkeit einzusehen, dafs die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt in einer bestimmten Form erscheinen kann, sondern ausgehend von einer festen Form wird die betreffende Umformung wirklich geleistet, insbesondere wird man von der allgemeinen Parameterdarstellung ausgehend zuletzt zu der kanonischen Form der Kurvengleichung gelangen, die synthetische Erzeugung der Unikursalkurven dritter Ordnung wird sich daraus ergeben etc. Die Tangentialgleichung der Kurve, die sich unter andern in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch findet, giebt Anlafs zu einer neuen Reihe von Untersuchungen, die dort nur angedeutet sind und die auf einem bisher nicht betretenen

Digitized by Google

Wege zu den Wendepunktseigenschaften der Kurven führen, wobei die einfache Form der Gleichung der Wendepunktslinie hervorzuheben ist. Endlich wird die Parameterdarstellung verallgemeinert und es werden gewisse Systeme von Unikursalkurven dritter Ordnung betrachtet, wobei einige der früheren Resultate eine neue Beleuchtung erfahren. Zum Schluſs wird eine kurze Übersicht über gewisse spezielle Fälle gegeben, von denen derjenige wohl am wichtigsten ist, der wieder zu der kanonischen Form der Kurvengleichung führt. Es verdient vielleicht noch bemerkt zu werden, daſs als wesentliches Hilfsmittel bei den Untersuchungen das System der sechs Linien verwendet wird, die zwischen vier Punkten möglich sind und daſs die allgemeine Darstellung der Beziehungen zwischen den Gleichungen dieser Linien auch für andere Untersuchungen nicht unwichtig sein dürfte.

§ 1. Bezeichnungen.

Die rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes seien durch einen Parameter t ausgedrückt in folgender Weise:

$$x = \frac{at^3+bt^2+ct+d}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}. \qquad y = \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}.$$

Aus den Koeffizienten seien die Determinanten zweiter Ordnung gebildet:

$$\begin{array}{lllll} bA-Ba=(bA)=p_1 & (cA)=p_2 & (dA)=p_3 & (cB)=p_4 & (dB)=p_5 \quad (dC)=p_6 \\ B\alpha-A\beta=(B\alpha)=q_1 & (C\alpha)=q_2 & (D\alpha)=q_3 & (C\beta)=q_4 & (D\beta)=q_5 \quad (D\gamma)=q_6 \\ \beta a-\alpha b=(\beta a)=r_1 & (\gamma a)=r_2 & (\delta a)=r_3 & (\gamma b)=r_4 & (\delta b)=r_5 \quad (\delta c)=r_6 \end{array}$$

Man bilde ferner folgende 4 Determinanten dritter Ordnung:

$$m=(Ab\gamma)=\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}. \quad n=(Ab\delta)=\begin{vmatrix} A & B & D \\ a & b & d \\ \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix}. \quad l=(Ac\delta)=\begin{vmatrix} A & C & D \\ a & c & d \\ \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix}. \quad k=(Bc\delta)=\begin{vmatrix} B & C & D \\ b & c & d \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Da $\begin{vmatrix} A & B & A \\ a & b & a \\ \alpha & \beta & \alpha \end{vmatrix}=0$, so folgt $Ar_1+aq_1+\alpha p_1=0$. Aus $\begin{vmatrix} A & B & B \\ a & b & b \\ \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}=0$ folgt $Br_1+bq_1+\beta p_1=0$.

m läſst sich darstellen in der Form: $Cr_1+cq_1+\gamma p_1$; n ebenso als $Dr_1+dq_1+\delta p_1$.

Man erhält folgendes System von Beziehungen, dessen vollständige Ableitung in ähnlicher Weise leicht durchgeführt werden kann:

$$\begin{array}{lll} \alpha p_1+aq_1+Ar_1=0 & \alpha p_2+aq_2+Ar_2=0 & \alpha p_3+aq_3+Ar_3=0 \\ \beta p_1+bq_1+Br_1=0 & \gamma p_2+cq_2+Cr_2=0 & \delta p_3+dq_3+Dr_3=0 \\ \gamma p_1+cq_1+Cr_1=m & \beta p_2+bq_2+Br_2=-m & \beta p_3+\ldots\ldots=-n \\ \delta p_1+dq_1+Dr_1=n & \delta p_2+dq_2+Dr_2=l & \gamma p_3+\ldots\ldots=-l \\ \gamma p_4+cq_4+Cr_4=0 & \beta p_5+bq_5+Br_5=0 & \delta p_6+dq_6+Dr_6=0 \\ \beta p_4+bq_4+Br_4=0 & \delta p_5+\ldots\ldots=0 & \gamma p_6+cq_6+Cr_6=0 \\ \alpha p_4+aq_4+Ar_4=m & \alpha p_5+\ldots\ldots=n & \alpha p_6+\ldots\ldots=l \\ \delta p_4+dq_4+Dr_4=k & \gamma p_5+\ldots\ldots=-k & \beta p_6+\ldots\ldots=k. \end{array} \qquad \text{I.}$$

Digitized by Google

Ferner setze man: $H = mk - ln$; $K = n^2 - lm$; $J = kn - l^2$.

Da $\begin{vmatrix} n & l & l \\ m & n & n \\ l & k & k \end{vmatrix} = 0$, so ergiebt sich $lH - nJ + kK = 0$.

Da $\begin{vmatrix} n & l & n \\ m & n & m \\ l & k & l \end{vmatrix} = 0$, so ergiebt sich $nH - mJ + lK = 0$. II.

§ 2. Das Aufsuchen des Doppelpunktes.

Jeder Punkt (x, y) der Kurve ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}; \qquad y = \frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}.$$

Soll die Kurve einen Doppelpunkt besitzen, dessen Koordinaten ξ und η heifsen mögen, so mufs für 2 verschiedene Werte von t (t_1 und t_2) sich ergeben:

$$x = \xi; \qquad y = \eta.$$

Man bilde:

$$x - \xi = \frac{t^3(a - \alpha\xi) + t^2(b - \beta\xi) + t(c - \gamma\xi) + d - \delta\xi}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} \quad \text{und}$$

$$y - \eta = \frac{t^3(A - \alpha\eta) + t^2(B - \beta\eta) + t(C - \gamma\eta) + D - \delta\eta}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}.$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen t durch t_1, so mufs sein: $x - \xi = 0$; $y - \eta = 0$; ersetzt man t durch t_2, so mufs ebenfalls sein $x - \xi = 0$; $y - \eta = 0$, d. h. die kubischen Gleichungen für t, welche die Zähler dieser Ausdrücke bilden, müssen t_1 und t_2 als gemeinsame Wurzeln besitzen. Nennt man die dritten nicht gemeinsamen Wurzeln λ und μ, so müssen die Identitäten bestehen:

$$\begin{aligned} t^3(a - \alpha\xi) + t^2(b - \beta\xi) + t(c - \gamma\xi) + d - \delta\xi &\equiv (a - \alpha\xi)(t - t_1)(t - t_2)(t - \lambda) \\ t^3(A - \alpha\eta) + t^2(B - \beta\eta) + t(C - \gamma\eta) + D - \delta\eta &\equiv (A - \alpha\eta)(t - t_1)(t - t_2)(t - \mu). \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Hieraus folgt durch Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Potenzen von t:

$$t_1 + t_2 + \lambda = -\frac{b - \beta\xi}{a - \alpha\xi}. \quad t_1 t_2 + \lambda(t_1 + t_2) = \frac{c - \gamma\xi}{a - \alpha\xi}. \quad t_1 t_2 \lambda = -\frac{d - \delta\xi}{a - \alpha\xi}.$$

$$t_1 + t_2 + \mu = -\frac{B - \beta\eta}{A - \alpha\eta}. \quad t_1 t_2 + \mu(t_1 + t_2) = \frac{C - \gamma\eta}{A - \alpha\eta}. \quad t_1 t_2 \mu = -\frac{D - \delta\eta}{A - \alpha\eta}.$$

Aus diesen Gleichungen sind λ, μ, ξ, η, t_1, t_2 zu bestimmen.

Man setze $t_1 t_2 = u$; $t_1 + t_2 = v$ und eliminiere λ und μ. Es ergiebt sich:

$$u - v\left\{\frac{b - \beta\xi}{a - \alpha\xi} + v\right\} = \frac{c - \gamma\xi}{a - \alpha\xi}; \qquad u\left\{\frac{b - \beta\xi}{a - \alpha\xi} + v\right\} = \frac{d - \delta\xi}{a - \alpha\xi}.$$

$$u - v\left\{\frac{B - \beta\eta}{A - \alpha\eta} + v\right\} = \frac{C - \gamma\eta}{A - \alpha\eta}; \qquad u\left\{\frac{B - \beta\eta}{A - \alpha\eta} + v\right\} = \frac{D - \delta\eta}{A - \alpha\eta}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
&1)\quad (u-v^2)(a-\alpha\xi)-v(b-\beta\xi)=c-\gamma\xi.\\
&2)\quad (u-v^2)(A-\alpha\eta)-v(B-\beta\eta)=C-\gamma\eta.\\
&3)\quad u(b-\beta\xi)+uv(a-\alpha\xi)=d-\delta\xi.\\
&4)\quad u(B-\beta\eta)+uv(A-\alpha\eta)=D-\delta\eta.
\end{aligned}\qquad \text{II.}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen kann man u und uv eliminieren. Man erhält:

$$u=\frac{(d-\delta\xi)(A-\alpha\eta)-(D-\delta\eta)(a-\alpha\xi)}{(b-\beta\xi)(A-\alpha\eta)-(a-\alpha\xi)(B-\beta\eta)}.$$

Ordnet man Zähler und Nenner nach ξ und η und benutzt die Bezeichnungen des § 1, so ergiebt sich:

$$u=\frac{p_3+q_3\xi+r_3\eta}{p_1+q_1\xi+r_1\eta}.$$

Ebenso erhält man:

$$uv=-\frac{p_5+q_5\xi+r_5\eta}{p_1+q_1\xi+r_1\eta}.$$

Jetzt ist also:

$$v=-\frac{p_5+q_5\xi+r_5\eta}{p_3+q_3\xi+r_3\eta}.$$

Eliminiert man v und $u-v^2$ aus den beiden ersten Gleichungen, so wird mit Benutzung der Bezeichnung des § 1 sich ergeben:

$$v=-\frac{p_2+q_2\xi+r_2\eta}{p_1+q_1\xi+r_1\eta},$$

$$u-v^2=-\frac{p_4+q_4\xi+r_4\eta}{p_1+q_1\xi+r_1\eta}.$$

Setzt man die beiden Werte für v einander gleich und benutzt in $u-v^2$ den zweiten Wert für v, so erhält man für die Koordinaten ξ, η des Doppelpunktes die Gleichungen:

$$(p_2+q_2\xi+r_2\eta)(p_3+q_3\xi+r_3\eta)=(p_1+q_1\xi+r_1\eta)(p_5+q_5\xi+r_5\eta).$$

$$\{p_3+p_4+\xi(q_3+q_4)+\eta(r_3+r_4)\}(p_1+q_1\xi+r_1\eta)=(p_2+q_2\xi+r_2\eta)^2.$$

Diese Gleichungen stellen 2 Kegelschnitte dar, deren Durchschnittspunkte genau zu untersuchen sind, um zu entscheiden, wie viele der 4 vorhandenen Schnittpunkte Doppelpunkte der C_8 liefern.

In der Folge soll, wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, $p_i+q_i\xi+r_i\eta$ abkürzend durch p_i bezeichnet werden. Die Gleichungen der Kegelschnitte lauten alsdann:

$$p_2p_3=p_1p_5 \quad \text{und} \quad (p_3+p_4)p_1=p_2^2.$$

Aus den Gleichungen ist ersichtlich, dafs sie beide erfüllt werden, wenn $p_1=0$ und $p_2=0$, d. h. der Schnittpunkt der beiden Geraden $p_1+q_1x+r_1y=0$ und

Digitized by Google

$p_2 + q_2 x + r_2 y = 0$ ist ein gemeinsamer Punkt der beiden Kegelschnitte. Nach § 1. I hat man:

$$\alpha p_1 + a q_1 + A r_1 = 0; \quad \alpha p_2 + a q_2 + A r_2 = 0; \quad \alpha p_3 + a q_3 + A r_3 = 0.$$

Die drei Geraden p_1, p_2, p_3 schneiden sich also in einem Punkte, dessen Koordinaten $x = \frac{a}{\alpha}$; $y = \frac{A}{\alpha}$ sind. Dieser Punkt, er möge in der Folge durch (123) bezeichnet werden, liegt, wie es sein mufs, auch auf der C_3; es ist, wie unmittelbar zu ersehen, derjenige Punkt, welcher dem Parameterwerte $t = \infty$ entspricht. Für diesen Punkt werden also $u = \infty$, $v = \infty$. Er ist kein Doppelpunkt der C_3.

Dies zeigt genauer die folgende Betrachtung, die auch ersichtlich machen soll, warum überhaupt die überflüssige Lösung $t = \infty$ in das Problem, den Doppelpunkt aufzusuchen, hineinkommt. Bedeuten ξ, η die Koordinaten eines einfachen Kurvenpunktes, der dem Parameterwert $t = t_1$ entspricht, so ist nach den Gleichungen I dieses Paragraphen:

$$t^3(a - \alpha\xi) + t^2(b - \beta\xi) + \ldots \equiv (a - \alpha\xi)(t - t_1)(t - t_2)(t - \lambda).$$
$$t^3(A - \alpha\eta) + t^2(B - \beta\eta) + \ldots \equiv (A - \alpha\eta)(t - t_1)(t - t_3)(t - \mu).$$

Die beiden kubischen Gleichungen haben nur eine gemeinsame Wurzel t_1. Die Gleichungen II werden, wenn man setzt $t_1 t_2 = u$; $t_1 t_3 = u_1$; $t_1 + t_2 = v$; $t_1 + t_3 = v_1$:

$$(u - v^2)(a - \alpha\xi) - v(b - \beta\xi) = c - \gamma\xi$$
$$(u_1 - v_1^2)(A - \alpha\eta) - v_1(B - \beta\eta) = C - \gamma\eta$$
$$u(b - \beta\xi) + u\,v(a - \alpha\xi) = d - \delta\xi$$
$$u_1(B - \beta\eta) + u_1 v_1(A - \alpha\eta) = D - \delta\eta.$$

Diese Gleichungen gehen in das System II über, für $u = u_1$; $v = v_1$. Ist $t_1 = \infty$, so wird aber $u = u_1 = \infty$ und $v = v_1 = \infty$. Also wird das System II für diese Werte von u und v erfüllt, obgleich t_2 ungleich t_3 ist. Die Lösung des Systems II mufs also umgekehrt notwendig zu dem Werte $t_1 = \infty$ führen, der die einzige gemeinsame Wurzel der Gleichungen I ist, also keinen Doppelpunkt der C_3 liefert.

Der Doppelpunkt mufs also einer der weiteren Schnittpunkte der Kegelschnitte:

$$p_1(p_3 + p_4) = p_2^2; \qquad p_2 p_3 = p_1 p_5$$

sein. In diesen Gleichungen repräsentiert p_i eine gerade Linie. Die weitere Untersuchung dieser Kegelschnitte erfordert die genaue Kenntnis des Systems der Linien p_i.

§ 3. Das Fundamentalsystem der Linien p.

Die Linie $p_1 + q_1 x + r_1 y = 0$ ist die Verbindungslinie der Punkte $x = \frac{a}{\alpha}$, $y = \frac{A}{\alpha}$ und $x = \frac{b}{\beta}$, $y = \frac{B}{\beta}$, denn nach den Gleichungen I des § 1 ist:

$$\alpha p_1 + a q_1 + A r_1 = 0, \qquad \beta p_1 + b q_1 + B r_1 = 0.$$

Digitized by Google

Ebenso ist $p_2 + q_2 x + r_2 y = 0$ die Verbindungslinie der Punkte $x = \frac{a}{\alpha}$, $y = \frac{A}{\alpha}$; $x = \frac{c}{\gamma}$, $y = \frac{C}{\gamma}$, wie aus $\alpha p_2 + a q_2 + A r_2 = 0$ und $\gamma p_2 + c q_2 + C r_2 = 0$ zu ersehen ist. Man findet so:

Im Punkte $x = \frac{a}{\alpha}$, $y = \frac{A}{\alpha}$ schneiden sich die 3 Geraden p_1, p_2, p_3; er kann bezeichnet werden als (123).

Im Punkte $x = \frac{b}{\beta}$, $y = \frac{B}{\beta}$ schneiden sich die 3 Geraden p_1, p_4, p_5; er kann bezeichnet werden als (145).

Im Punkte $x = \frac{c}{\gamma}$, $y = \frac{C}{\gamma}$ schneiden sich die 3 Geraden p_2, p_4, p_6; er kann bezeichnet werden als (246).

Im Punkte $x = \frac{d}{\delta}$, $y = \frac{D}{\delta}$ schneiden sich die 3 Geraden p_3, p_5, p_6; er kann bezeichnet werden als (356).

Die Linien p sind also die 6 Geraden, welche zwischen den 4 genannten Punkten möglich sind; sie bilden ein vollständiges Viereck.

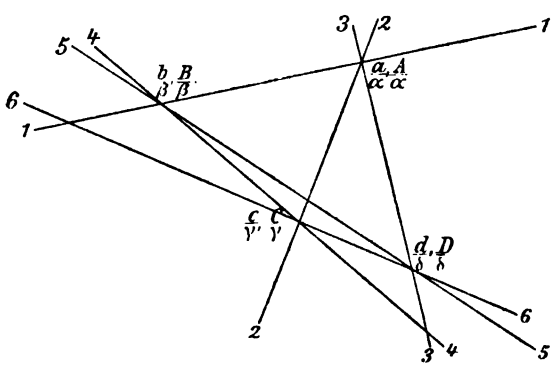

Fig. 1.

Von den so bestimmten Punkten liegen (123) und (356) auf der C_3. Ersterer gehört zum Parameterwert $t = \infty$, letzterer zu $t = 0$.

Die Gleichungen der 6 Linien p sind jedoch nicht von einander unabhängig. Es existieren zwischen ihnen 4 identische Relationen, die jetzt abgeleitet werden sollen. Die Linie p_2 geht durch den Schnittpunkt von p_1 und p_3, folglich mufs p_2 linear durch p_1 und p_3 ausdrückbar sein, d. h. es mufs sein:

$$\lambda p_2 \equiv \mu p_1 + \nu p_3.$$

Die Gröfsen λ, μ, ν sind zu bestimmen, da ja durch die 4 Fundamentalpunkte die Linien selbst eindeutig bestimmt sind. Setzt man in diese Gleichung, wo $p_i = p_i + q_i x + r_i y$ ist, $x = \frac{b}{\beta}$, $y = \frac{B}{\beta}$, so wird nach § 1, I:

$$-\lambda m = -\nu n.$$

Setzt man $x = \frac{d}{\delta}$, $y = \frac{D}{\delta}$, so wird $\lambda l = \mu n$. Es ist also $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{n}{m}$ und $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{n}{l}$, d. h. man hat: $\lambda = \varrho n$; $\nu = \varrho m$; $\mu = \varrho l$, wo ϱ einen konstanten Faktor bezeichnet. Die gesuchte Identität wird also $n p_2 \equiv l p_1 + m p_3$.

Ebenso mufs sich p_4 linear durch p_1 und p_5; p_6 linear durch p_3 und p_5 und p_4

Digitized by Google

linear durch p_3 und p_6 ausdrücken lassen. Es bietet keine Schwierigkeit, mit Hilfe der Gleichungen § 1 I diese Identitäten abzuleiten. Man erhält:

$$\begin{aligned} np_3 &= lp_1 + mp_3 \\ np_4 &= kp_1 + mp_5 \\ np_6 &= lp_5 - kp_3 \\ lp_4 &= kp_3 + mp_6. \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

Aus den ersten 3 Gleichungen läfst sich die letzte auch direkt ableiten. Ersetzt man nämlich in der letzten Gleichung p_3, p_4, p_6 durch ihre Werte aus den drei ersten Gleichungen, so ergiebt sich eine identische Gleichung.

Es existiert zwischen den 6 Gleichungen der Linien p noch eine quadratische Beziehung, die später von Wichtigkeit sein wird und daher jetzt abgeleitet werden soll. Jeder Kegelschnitt durch die 4 Fundamentalpunkte läfst sich in der Form darstellen: $\lambda p_3 p_5 + \mu p_3 p_4$. Das Linienpaar $p_1 p_6$ bildet aber einen solchen Kegelschnitt, also mufs die Identität bestehen:

$$\nu p_1 p_6 \equiv \lambda p_3 p_5 + \mu p_3 p_4.$$

Um ν, λ, μ zu bestimmen, ersetze man in $n\lambda p_3 p_5 + n\mu p_3 p_4$ die Gröfsen np_3 und np_4 durch ihre den Gleichungen III entnommenen Werte. Es ergiebt sich:

$$\lambda p_5(lp_1 + mp_3) + \mu p_3(kp_1 + mp_5) \quad \text{oder}$$
$$p_1\{\lambda l p_5 + \mu k p_3\} + m p_3 p_5(\lambda + \mu).$$

Damit dies die Form $p_1 p_6$ annimmt, mufs sein $\lambda + \mu = 0$; $\lambda = 1$; $\mu = -1$.
Man erhält also $np_3 p_5 - np_3 p_4 \equiv np_1 p_6$ oder

$$p_1 p_6 \equiv p_3 p_5 - p_3 p_4. \qquad \text{IV.}$$

Es mag bemerkt werden, dafs die hier aufgestellten Identitäten zwischen den 6 Gleichungen $p_i + q_i x + r_i y = 0$ ganz allgemein gelten, unabhängig von den Beziehungen zu der C_3. Da die a, A, α etc. beliebig gegebene Gröfsen sind, so sind durch sie die 4 Fundamentalpunkte bestimmt und zwischen den Gleichungen der 6 Verbindungslinien bestehen die Relationen III und IV. Um den Doppelpunkt der C_3 zu finden, genügt die Kenntnis der Relationen $np_3 = lp_1 + mp_3$ und $np_4 = kp_1 + mp_5$. Für das Folgende ist jedoch das vollständige System der Beziehungen III und IV erforderlich.

§ 4. Der Doppelpunkt als Schnittpunkt zweier Kegelschnitte.

Nach diesen Vorbereitungen werde die Untersuchung der Schnittpunkte der Kegelschnitte $p_1(p_3 + p_4) = p_2^2$ und $p_2 p_3 = p_1 p_5$ wieder aufgenommen. Der erste Kegelschnitt hat, wie aus der Form der Gleichung unmittelbar ersichtlich, p_1 und $p_3 + p_4$ zu Tangenten und p_2 zur Berührungssehne. In der Gleichung des zweiten Kegelschnittes setze man $np_2 = lp_1 + mp_3$. Alsdann läfst sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$mp_3^2 = p_1(np_5 - lp_3),$$

d. h. dieser Kegelschnitt hat ebenfalls im Punkte (123) p_1 zur Tangente. Sie können

Digitized by Google

also nur noch zwei weitere Punkte gemeinsam haben. Es sei $S_1 = p_1(p_3 + p_4) - p_2^2$ und $S_2 = p_2 p_3 - p_1 p_5$. Man bilde $S_1 - \lambda S_2 = p_1(p_3 + p_4 - \lambda p_5) - p_2(p_2 + \lambda p_3)$.

$S_1 - \lambda S_2$ stellt einen Kegelschnitt dar, der durch die gemeinsamen Punkte von S_1 und S_2 hindurchgeht. Da p_1 eine gemeinsame Tangente von S_1 und S_2 ist, so muſs $S_1 - \lambda S_2$ in der Form $p_1 \cdot P$ darstellbar sein, wo $P = 0$ die Gleichung derjenigen Linie ist, welche die weiteren Schnittpunkte von S_1 und S_2 enthält.

Nimmt man $\lambda = -\frac{m}{n}$, so wird, weil $n p_2 - m p_3 = l p_1$ ist:

$$S_1 - \lambda S_2 = p_1 \left\{ p_3 + p_4 - \frac{m}{n} p_5 - \frac{l}{n} p_2 \right\}.$$

Es ist aber $p_4 - \frac{m}{n} p_5 = \frac{k}{n} p_1$ nach den Gleichungen III. Also wird:

$$S_1 - \lambda S_2 = p_1 \left\{ p_3 + \frac{k}{n} p_1 - \frac{l}{n} p_2 \right\}.$$

Die Gleichung der Linie, welche die gesuchten Schnittpunkte enthält, lautet also $n p_3 + k p_1 - l p_2 = 0$. Diese Linie geht, wie die Gleichung zeigt, durch (123). Also haben S_1 und S_2 in (123) drei Punkte gemeinsam. Der vierte Schnittpunkt dieser Kegelschnitte ist der gesuchte Doppelpunkt. Da der Punkt (123) bei reellen Koeffizienten stets reell ist, so muſs auch der Doppelpunkt ein reeller Punkt sein, denn sind drei Schnittpunkte zweier Kegelschnitte reell, so ist es auch der vierte. Weitere Beziehungen des Doppelpunktes zu dem Fundamentalsystem ergeben sich aus der Gleichung der C_3, die sich leicht in Gestalt einer Determinante dritter Ordnung darstellen läſst.

§ 5. Die Gleichung der C_3.

Um die Gleichung der C_3 zu finden, hat man aus:

$$x = \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}; \qquad y = \frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}$$

den Parameter t zu eliminieren. Diese Elimination werde nach der Methode von Bézout vorgenommen, die sich für derartige Eliminationen wohl am meisten empfehlen dürfte, schon darum, weil sie das Resultat in Gestalt einer Determinante ohne überflüssige Glieder, d. h. solcher, welche Null sind, liefert[1]). Die obigen Gleichungen können geschrieben werden:

$$\begin{aligned} t^3(a - \alpha x) + t^2(b - \beta x) + t(c - \gamma x) + d - \delta x = 0 \qquad & 1. \\ t^3(A - \alpha y) + t^2(B - \beta y) + t(C - \gamma y) + D - \delta y = 0. \qquad & 2. \end{aligned} \qquad \text{V.}$$

Man multipliziere 1. mit $A - \alpha y$ und 2. mit $a - \alpha x$ und subtrahiere. Man erhält:

$$\begin{aligned} t^2\{(b - \beta x)(A - \alpha y) - (B - \beta y)(a - \alpha x)\} + t\{(c - \gamma x)(A - \alpha y) - (C - \gamma y)(a - \alpha x)\} \\ + (d - \delta x)(A - \alpha y) - (D - \delta y)(a - \alpha x) = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) Salmon: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl. S. 96.

Digitized by Google

Mit Anwendung der Bezeichnung des § 1 wird diese Gleichung:

$$t^2\{p_1+q_1x+r_1y\}+t\{p_2+q_2x+r_2y\}+p_3+q_3x+r_3y=0. \quad 3.$$

Multipliziert man 1. mit $t(A-\alpha y)+B-\beta y$ und 2. mit $t(a-\alpha x)+b-\beta x$ und subtrahiert, so erhält man nach Anwendung der Bezeichnung des § 1:

$$t^2\{p_2+q_2x+r_2y\}+t\{p_3+p_4+x(q_3+q_4)+y(r_3+r_4)\}+p_5+q_5x+r_5y=0. \quad 4.$$

Multipliziert man 1. mit $t^2(A-\alpha y)+t(B-\beta y)+C-\gamma y$ und 2. mit $t^2(a-\alpha x)+t(b-\beta x)+c-\gamma x$, so erhält man durch Subtraktion:

$$t^2\{p_3+q_3x+r_3y\}+t(p_5+q_5x+r_5y)+p_6+q_6x+r_6y=0. \quad 5.$$

Aus 3. 4. 5. kann man t^2, t^1, t^0 linear eliminieren und erhält die gesuchte Gleichung in der Form:

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1x+r_1y & p_2+q_2x+r_2y & p_3+q_3x+r_3y \\ p_2+q_2x+r_2y & p_3+p_4+x(q_3+q_4)+y(r_3+r_4) & p_5+q_5x+r_5y \\ p_3+q_3x+r_3y & p_5+q_5x+r_5y & p_6+q_6x+r_6y \end{vmatrix}=0. \qquad \text{VI.}$$

Aus dieser Gleichung ist sofort ersichtlich, dafs der Punkt (123), für den $p_1+q_1x+r_1y$; $p_2+q_2x+r_2y$; $p_3+q_3x+r_3y$ zugleich verschwinden, ein Punkt der C_3 ist; ebenso auch (356), für den $p_3+q_3x+\ldots$, $p_5+q_5x+\ldots$, $p_6+\ldots$ zugleich verschwinden.

In der Folge werde $p_i+q_ix+r_iy$ durch p_i abkürzend bezeichnet. Alsdann lautet die Determinante nach den Elementen der letzten Vertikalreihe entwickelt:

$$p_3\{p_3p_5-p_3(p_3+p_4)\}-p_5\{p_1p_5-p_2p_3\}+p_6\{p_1(p_3+p_4)-p_2^2\}=0.$$

Die Koordinaten des Doppelpunktes erfüllen diese Gleichung. Aufserdem weifs man aber, dafs die Koordinaten dieses Punktes die Gleichungen:

$$p_1p_5-p_2p_3=0 \quad \text{und} \quad p_1(p_3+p_4)-p_2^2=0$$

erfüllen. Es gilt also für die Koordinaten des Doppelpunktes auch die Gleichung:

$$S_3=p_2p_5-p_3(p_3+p_4)=0.$$

Diese Gleichung kann durch IV umgeformt werden. Sie lautet alsdann:

$$S_3=p_1p_6-p_3^2=0.$$

Dieser Kegelschnitt hat p_1 und p_6 zu Tangenten und p_3 als zugehörige Berührungssehne. Entwickelt man jetzt die obige Determinante nach den Elementen der zweiten Vertikalreihe, so ergiebt sich:

$$p_2\{p_3p_6-p_3p_5\}-(p_3+p_4)\{p_1p_6-p_3^2\}+p_5\{p_1p_5-p_2p_3\}=0.$$

Setzt man die Koordinaten des Doppelpunktes in diese Gleichung ein, so folgt, da $p_1p_6-p_3^2$ und $p_1p_5-p_2p_3$ einzeln Null werden, dafs auch $p_2p_6-p_3p_5=0$ ist für die Koordinaten des Doppelpunktes. Entwickelt man endlich die Determinante der Kurvengleichung nach den Elementen der ersten Vertikalreihe, so ersieht man, dafs die Koordinaten des Doppelpunktes der Gleichung $p_6(p_3+p_4)-p_5^2=0$ genügen müssen. Man hat demnach folgendes allgemeine Resultat:

Digitized by Google

„Stellt man die Gleichung einer Unikursalkurve dritter Ordnung durch die Determinante VI dar, so repräsentieren die Unterdeterminanten zweiter Ordnung Kegelschnitte, die sich sämtlich im Doppelpunkt schneiden."

Es giebt 5 solcher Kegelschnitte, nämlich:

$$\begin{aligned} S_1 &= p_1(p_3+p_4)-p_2^2 \\ S_2 &= p_2 p_3 - p_1 p_5 \\ S_3 &= p_2 p_5 - p_3(p_3+p_4) \equiv p_1 p_6 - p_3^2. \\ S_5 &= p_2 p_6 - p_3 p_5 \\ S_6 &= p_6(p_3+p_4)-p_5^2. \end{aligned} \qquad \text{VII.}$$

Man kann umgekehrt leicht zeigen, dafs, wenn die Koordinaten ξ, η eines Punktes den 5 obigen Gleichungen genügen, dieser ein Doppelpunkt der durch die Gleichung VI dargestellten C_3 ist. Transformiert man nämlich die Gleichung so, dafs ξ, η Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems wird, dessen Axen den alten parallel sind, so hat man in VI zu setzen:

$$x = x_1 + \xi; \qquad y = y_1 + \eta.$$

Die neue Determinante läfst sich zerlegen, so dafs man die Gleichung erhält:

$$x_1^3 A_1 + x_1^2 y_1 A_2 + x_1 y_1^2 A_3 + y_1^3 A_4 + x_1^2 B_1 + x_1 y_1 B_2 + y_1^2 B_3 + x_1 C_1 + y_1 C_2 + D_1 = 0.$$

Die A, B, C, D sind sämtlich Summen von Determinanten dritter Ordnung, von denen hier nur interessieren C_1, C_2, D_1. Ihre Werte sind:

$$C_1 = \begin{vmatrix} q_1 & p_2+q_2\xi+r_2\eta & p_3+q_3\xi+r_3\eta \\ q_2 & p_3+p_4+\xi(q_3+q_4)+\eta(r_3+r_4) & p_5+q_5\xi+r_5\eta \\ q_3 & p_5+q_5\xi+r_5\eta & p_6+q_6\xi+r_6\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1+q_1\xi+r_1\eta & q_2 & p_3+\ldots. \\ p_2+\ldots. & q_3+q_4 & p_5+\ldots. \\ p_3+\ldots. & q_5 & p_6+\ldots. \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} p_1+q_1\xi+r_1\eta & p_2+\ldots. & q_3 \\ p_2+\ldots. & p_3+p_4+\ldots. & q_5 \\ p_3+\ldots. & p_5+\ldots. & q_6 \end{vmatrix}.$$

C_2 ergiebt sich, wenn die Vertikalreihen der q durch die entsprechenden der r ersetzt werden.

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_1+q_1\xi+r_1\eta & p_2+q_2\xi+r_2\eta & p_3+q_3\xi+r_3\eta \\ p_2+\ldots. & p_3+p_4+\ldots. & p_5+\ldots. \\ p_3+\ldots. & p_5+\ldots. & p_6+\ldots. \end{vmatrix}.$$

Sind für ξ und η die Gleichungen $S=0$ erfüllt, welche ja als Unterdeterminanten in den weiteren Entwicklungen von C_1, C_2, D_1 auftreten, so wird $C_1=C_2=D_1=0$. Die Gleichung der Kurve enthält also nur noch kubische und quadratische Glieder in x_1 und y_1. Sie stellt also eine C_3 dar, die den Anfangspunkt ($x_1=0$; $y_1=0$) als Doppelpunkt besitzt.

§ 6. Die fünf Kegelschnitte S.

Von den 5 Kegelschnitten S, deren Gleichungen unter VII gegeben sind, ist bekannt, dafs sie einen gemeinsamen Punkt haben, nämlich den Doppelpunkt der C_3. Es kommt noch darauf an, ihr gegenseitiges Verhalten und ihre weiteren Beziehungen zu der C_3 zu erörtern.

Digitized by Google

Die Kegelschnitte S_1 und S_6, ebenso S_2 und S_5, entsprechen sich insofern, als das, was von einem in Bezug auf den Punkt (123) gilt, für den andern in Bezug auf den Punkt (356) richtig ist.

S_1 und S_6 haben p_3+p_4 zur gemeinsamen Tangente. S_1 hat in (123) die Tangente p_1; S_6 hat in (356) die Tangente p_6.

S_2 liefs sich auf die Form bringen $m p_3^2 = p_1(n p_5 - l p_3)$.

S_5 läfst sich, wenn man setzt $l p_5 = n p_6 + k p_3$, auf die Form bringen $k p_3^2 = p_6(l p_3 - n p_5)$.

Beide Kegelschnitte gehen durch (123) und (356). S_2 hat in (123) p_1 zur Tangente; S_5 hat in (356) p_6 zur Tangente. Aufserdem gehen beide Kurven, wie aus der ursprünglichen Form ersichtlich, durch (25). Die Verbindungslinie von (25) mit dem Doppelpunkt und die Linie p_3 sind also gemeinsame Sehnen. Bildet man $S_2 - \lambda S_5 = p_2 p_3 - p_1 p_5 - \lambda(p_2 p_6 - p_3 p_5)$ und setzt nach III:

$$p_1 = \frac{n}{l} p_2 - \frac{m}{l} p_3 \quad \text{und} \quad p_6 = \frac{l}{n} p_5 - \frac{k}{n} p_3,$$

so erhält man:

$$S_2 - \lambda S_5 = p_3(p_2 + \lambda p_5) - \frac{m}{l} p_3 p_5 - \lambda \frac{k}{n} p_2 p_3 + p_2 p_5 \left(\frac{n}{l} + \lambda \frac{l}{n}\right).$$

Es sei $\frac{n}{l} + \lambda \frac{l}{n} = 0$, also $\lambda = -\frac{n^2}{l^2}$. Man erhält:

$$S_2 - \lambda S_5 = p_3 \left\{ p_2 \left(1 - \frac{nk}{l^2}\right) + p_5 \left(\frac{m}{l} - \frac{n^2}{l^2}\right) \right\}.$$

Die Gleichung der Linie (25), Doppelpunkt lautet also: $p_2(l^2 - nk) + p_5(ml - n^2) = 0$ oder mit Benutzung der Bezeichnung des § 1:

$$p_2 J + p_5 K = 0.$$

Die Kegelschnitte S_1 und S_2 berührten sich, wie in § 4 gezeigt, in (123) dreipunktig. Ebenso läfst sich zeigen, dafs sich S_5 und S_6 in (356) dreipunktig berühren. Da man durch die zugehörige Ableitung die Gleichung der Linie erhält, welche (356) mit dem Doppelpunkt verbindet, so mag sie hier durchgeführt werden. Man bilde:

$$S_6 + \lambda S_5 = p_6(p_3 + p_4) - p_5^2 - \lambda p_3 p_5 + \lambda p_2 p_6 = p_6(p_3 + p_4 + \lambda p_2) - p_5(p_5 + \lambda p_3).$$

Man setze $\lambda = -\frac{k}{l}$, so wird $p_5 + \lambda p_3 = \frac{n}{l} p_6$ (nach III).

$$S_6 + \lambda S_5 = \frac{1}{l} p_6(l p_3 + l p_4 - k p_2 - n p_5) = \frac{1}{l} p_6(l p_3 + m p_6 - n p_5), \text{ da } l p_4 - k p_2 = m p_6.$$

Also lautet die Gleichung der Linie (356), Doppelpunkt:

$$l p_3 + m p_6 - n p_5 = 0.$$

Es läfst sich ferner in ähnlicher Weise mit Benutzung der Gleichungen III zeigen, dafs S_1 und S_5 die Linie p_4 als gemeinsame Sehne besitzen. Dieselbe Linie ist auch gemeinsame Sehne von S_2 und S_6.

Jeder der 5 Kegelschnitte geht durch den Doppelpunkt der C_3; er hat also in diesem Punkte 2 Punkte mit der C_3 gemeinsam, es bleiben noch 4 andere Schnittpunkte, da eine C_3 und ein Kegelschnitt 6 Punkte gemeinsam haben. S_3 hat mit der C_3 die

Digitized by Google

Punkte (123), (356) und den Doppelpunkt gemeinsam. Um die Schnittpunkte beider Kurven genauer festzustellen, entwickle man die Gleichung VI nach Unterdeterminanten der ersten Vertikalreihe und berücksichtige, dafs $p_3^2 - p_1 p_6 \equiv p_3(p_3 + p_4) - p_2 p_5 = 0$ ist. Man erhält:

$$p_1\{p_6(p_3 + p_4) - p_5^2\} - p_2(p_2 p_6 - p_3 p_5) = 0.$$

Da $p_1 p_6(p_3 + p_4) = p_3^2(p_3 + p_4) = p_3 p_2 p_5$ ist, so gilt für die Schnittpunkte die Gleichung:

$$2 p_2 p_3 p_5 - p_1 p_5^2 - p_2^2 p_6 = 0.$$

Setzt man $l p_5 = n p_6 + k p_3$ und $n p_2 = l p_1 + m p_3$ und weiter dann $p_3^2 = p_1 p_6$, so erhält man aus obiger Gleichung:

$$p_1 p_6(J^2 p_1 + K^2 p_6 + 2 p_3 JK) = 0.$$

Die Schnittpunkte beider Kurven liegen also auf drei geraden Linien p_1, p_6 und $J^2 p_1 + K^2 p_6 + 2JK p_3$. Da p_1 in (123) S_3 berührt, also 2 Schnittpunkte zusammenfallen, so mufs S_3 in (123) die C_3 berühren, ebenso auch in (356). Es folgt daraus noch, was sich im Folgenden bestätigen wird, dafs p_1 und p_6 Tangenten an die C_3 sind. Da im Doppelpunkt 2 Schnittpunkte von S_3 und C_3 zusammenfallen, so mufs

$$J^2 p_1 + K^2 p_6 + 2JK p_3 = 0$$

die Gleichung der Tangente an S_3 im Doppelpunkt sein.

Um die Schnittpunkte von S_1 mit der C_3 aufzufinden, berücksichtige man Folgendes:

1) Die Gleichung der Verbindungslinie des Doppelpunktes mit (123) lautete nach § 4 $n p_3 + k p_1 - l p_2 = 0$. Man setze $p_3 = \frac{1}{m}(n p_2 - l p_1)$ und erhält die Gleichung in der Gestalt $\frac{1}{m}(H p_1 + K p_2) = 0$.

2) Man drücke p_5 durch $p_3 + p_4$, p_1 und p_2 aus. Die Gleichungen III ergeben: $m p_5 = n p_4 - k p_1 = n(p_4 + p_3) - k p_1 - n p_3$. Setzt man wieder $p_3 = \frac{1}{m}(n p_2 - l p_1)$, so wird, wenn $p_3 + p_4$ für diese Rechnung gleich p gesetzt wird:

$$m^2 p_5 = mnp - n^2 p_2 - H p_1.$$

S_1 lautet jetzt einfach $p_1 p - p_2^2 = 0$.

Man entwickle VI nach Unterdeterminanten der letzten Vertikalreihe und berücksichtige, dafs $S_1 = 0$ ist für die Schnittpunkte von S_1 und C_3. Man erhält für diese Punkte alsdann die Gleichung:

$$2 p_2 p_3 p_6 - p_3^2 p - p_1 p_5^2 = 0.$$

Diese Gleichung multipliziere man mit m^4 und setze die obigen Werte von $m^2 p_5$ und p_3 ein, so erhält man, wenn man $p_1 p = p_2^2$ benutzt, nach einigen Rechnungen das Resultat:

$$-p_1(H p_1 + K p_2)^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte liegen also auf p_1 und auf $H p_1 + K p_2$. Da p_1, wie bekannt, S_1 berührt, so fallen in (123) 2 Schnittpunkte beider Kurven zusammen. p_1 ist, wie

Digitized by Google

diese Rechnung ebenfalls ergiebt, Tangente an die C_3. Die übrigen Schnittpunkte liegen doppelt auf Hp_1+Kp_2, da in obiger Gleichung $(Hp_1+Kp_2)^2$ vorkommt. $Hp_1+Kp_2=0$ ist aber, wie unter 1) abgeleitet, die Gleichung der Verbindungslinie des Doppelpunktes mit (123). Demnach fallen 2 weitere Schnittpunkte in (123) und 2, wie es sein mufs, in den Doppelpunkt. S_1 berührt also die C_3 in (123) vierpunktig.

Ganz ähnlich läfst sich zeigen, dafs S_6 in (356) die C_3 vierpunktig berührt.

Es sind endlich noch die Schnittpunkte von S_2 mit der C_3 genauer zu untersuchen. Folgendes sei vorausgeschickt. In der Gleichung der Verbindungslinie von (123) mit dem Doppelpunkt setze man $p_2=\frac{1}{n}(lp_1+mp_3)$, sie nimmt die Form an:

$$np_3+kp_1-\frac{l^2}{n}p_1-\frac{lm}{n}p_3 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n}(Kp_3+Jp_1).$$

$S_2=0$ giebt für diese Rechnung $p_2p_3=p_1p_5$. Man löse VI nach Unterdeterminanten der zweiten Vertikalreihe auf und berücksichtige, dafs $p_2p_3-p_1p_5=0$ ist. Man erhält für die Schnittpunkte von C_3 und S_2 die Relation:

$$(p_3+p_4)(p_6p_1-p_3^2)+p_5(p_3p_5-p_2p_6)=0.$$

Man drücke mit Hilfe der Gleichungen III p_4, p_2, p_5 durch p_1, p_3, p_6 aus. Zur Vermeidung von Nennern multipliziere man mit kn. Man findet nach einigen Rechnungen für die Koordinaten der Schnittpunkte die Relation:

$$(p_6p_1-p_3^2)(Kp_3+Jp_1)=0.$$

Die Schnittpunkte von C_3 und S_2 liegen also entweder auf $S_3=0$ oder auf $Kp_3+Jp_1=0$. Letztere Gleichung gehört, wie abgeleitet, zur Verbindungslinie des Doppelpunktes mit (123). Hiermit sind 2 Schnittpunkte gefunden, nämlich (123) und der Doppelpunkt als einfache Punkte. Die Schnittpunkte von S_2 und S_3 sind aber bekannt, es sind (356) und der Doppelpunkt als einfache Punkte und (123) als ein zweifacher Punkt. Der Kegelschnitt S_2 hat also in (123) mit der C_3 3 Punkte gemeinsam, im Doppelpunkt 2 und in (356) einen Punkt. Ebenso ist zu zeigen, dafs S_5 in (356) mit der C_3 eine dreipunktige Berührung hat.

Die 5 Kegelschnitte S können also nach ihrem Verhalten zu der C_3 auch so definiert werden:

S_1 ist derjenige Kegelschnitt, der durch den Doppelpunkt geht und die C_3 in (123) vierpunktig berührt.

S_2 ist derjenige Kegelschnitt, der durch den Doppelpunkt geht und die C_3 in (123) dreipunktig berührt und (356) mit ihr gemeinsam hat.

S_3 ist derjenige Kegelschnitt, der durch den Doppelpunkt geht und die C_3 in (123) und (356) zweipunktig berührt.

S_5 ist derjenige Kegelschnitt, der durch den Doppelpunkt geht und die C_3 in (356) dreipunktig berührt und durch (123) geht.

S_6 ist derjenige Kegelschnitt, der durch den Doppelpunkt geht und die C_3 in (356) vierpunktig berührt.

Digitized by Google

§ 7. Die Schnittpunkte einer Geraden mit der C_3.

Um die Parameterwerte der Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve zu finden, setze man in die Gleichung der Geraden $\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0$ für x und y die Werte:

$$x = \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}; \qquad y = \frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta}.$$

Man erhält eine kubische Gleichung für t, welche die gesuchten Parameterwerte liefert. Diese Betrachtung kann man zum Ausgangspunkt der Untersuchung der C_3 machen, wie es z. B. geschehen ist in der erwähnten Abhandluug von Rosenow[1]). Dieser Gegenstand kann deshalb hier kürzer behandelt werden. Man stelle zuerst die Schnittpunkte der 6 Linien p mit der C_3 fest, dazu berücksichtige man das System der Gleichungen I.

Man setze die obigen Werte von x und y in $p_1 + q_1 x + r_1 y = 0$ ein und erhält: $t^3 \cdot 0 + t^2 \cdot 0 + mt + n = t$. Diese Gleichung hat die Doppelwurzel $t = \infty$. p_1 ist also eine Tangente an die C_3. Der dritte Schnittpunkt ist bestimmt durch den Parameterwert $t = -\frac{n}{m}$.

Setzt man obige Werte in $p_2 + q_2 x + r_2 y = 0$ ein, so erhält man: $t^3 \cdot 0 - t^2 m + t \cdot 0 + l = 0$. Man erhält die Parameterwerte der Schnittpunkte $t_1 = \infty$; $t_2 = +\sqrt{\frac{l}{m}}$; $t_3 = -\sqrt{\frac{l}{m}}$.

Für die Parameterwerte der Schnittpunkte von $p_3 + q_3 x + r_3 y = 0$ mit der C_3 findet man die Gleichung: $t^3 \cdot 0 - nt^2 - lt + 0 = 0$, also $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$, $t_3 = -\frac{l}{n}$.

Für die Parameterwerte der Schnittpunkte von p_4 ergiebt sich: $t^3 m + k = 0$; $t = -\varepsilon \sqrt[3]{\frac{k}{m}}$, wo $\varepsilon^3 = 1$.

Für die Parameterwerte der Schnittpunkte von p_5 ergiebt sich: $t_1 = 0$; $t_2 = +\sqrt{\frac{k}{n}}$; $t_3 = -\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Für die Parameterwerte der Schnittpunkte von p_6 ergiebt sich: $t_1 = t_2 = 0$; $t_3 = -\frac{k}{l}$. Da für die Schnittpunkte von p_6 mit der C_3 2 Werte von t zusammenfallen, so ist p_6 eine Tangente an die C_3.

Die Gleichung einer beliebigen Geraden läfst sich bekanntlich linear durch die Gleichungen dreier festen Geraden ausdrücken, d. h. sie kann in die Form gebracht werden:

$$\alpha_1(p_1 + q_1 x + r_1 y) + \alpha_2(p_3 + q_3 x + r_3 y) + \alpha_3(p_6 + q_6 x + r_6 y) = 0.$$

Setzt man die obigen Werte für x und y ein und wendet § 1. I an, so erhält man für die Parameter der Schnittpunkte die Gleichung:

$$t^3 \alpha_3 l + t^2 \{\alpha_3 k - n\alpha_2\} + t\{\alpha_1 m - \alpha_2 l\} + \alpha_1 n = 0. \qquad \text{VIII.}$$

---

[1]) Siehe auch Igel: Mathem. Annalen Bd. 6; Salmon: Höhere ebene Kurven, 2. Aufl. S. 239—243.

Digitized by Google

Wenn 2 Wurzeln dieser Gleichung einander gleich werden, so wird $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_3 + \alpha_3 p_6$ eine Tangente an die C_3. Wenn die 3 Wurzeln dieser Gleichung in eine zusammenfallen, so erhält man die Bedingungen dafür, dafs die Gerade eine Wendetangente wird. Diese Bedingungen mögen genauer entwickelt werden. Ist σ der Parameter eines Wendepunktes, so mufs sein:

$$t^3 + t^2 \frac{k\alpha_3 - n\alpha_2}{l\alpha_3} + t \frac{\alpha_1 m - l\alpha_2}{l\alpha_3} + \frac{n\alpha_1}{l\alpha_3} \equiv (t-\sigma)^3.$$

Man erhält die Bedingungen:

$$\frac{k\alpha_3 - n\alpha_2}{l\alpha_3} = -3\sigma; \quad \frac{m\alpha_1 - l\alpha_2}{l\alpha_3} = 3\sigma^2; \quad \frac{n\alpha_1}{l\alpha_3} = -\sigma^3.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = -\frac{l\sigma^3}{n}; \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{k}{n} + 3\frac{l}{n}\sigma; \quad \frac{m}{l} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 3\sigma^2.$$

Setzt man die Werte von $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ und $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ in die letzte dieser Gleichungen ein, so erhält man zur Bestimmung der Parameterwerte der Wendepunkte die Gleichung:

$$m\sigma^3 + 3n\sigma^2 + 3l\sigma + k = 0\ ^1). \qquad \text{IX.}$$

Wenn man die Werte von $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$ und $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ in $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_3 + \alpha_3 p_6 = 0$ einsetzt, so erhält man die Gleichung einer Wendetangente in der Form:

$$-l\sigma^3 p_1 + (k + 3l\sigma) p_3 + n p_6 = 0.$$

Für σ ist eine Wurzel der Gleichung IX zu setzen. Eine eingehende Behandlung der Wendepunkte nach einer andern Methode wird später durchgeführt werden.

§ 8. Die Parametereigenschaften des Doppelpunktes.

Die Gleichung der Linie, welche (123) mit dem Doppelpunkt verbindet, lautet nach § 4:

$$n p_3 + k p_1 - l p_2 = 0.$$

Die Gleichung der Linie, die (356) mit dem Doppelpunkt verbindet, lautet nach § 6

$$l p_3 + m p_6 - n p_5 = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichungen III lassen sich diese Gleichungen, die abkürzend durch u und v bezeichnet werden mögen, in folgende Form bringen:

$$\text{(123) Doppelpunkt:} \quad p_1 J + p_3 K = u; \quad p_2 K + p_1 H \equiv \frac{m}{n} u; \quad p_2 J - H p_3 \equiv \frac{l}{n} u.$$

$$\text{(356) Doppelpunkt:} \quad p_6 K + p_3 J = v; \quad p_5 J - p_6 H \equiv \frac{k}{l} v; \quad p_5 K + p_3 H \equiv \frac{n}{l} v. \qquad \text{IXa.}$$

---

[1]) Siehe Rosenow S. 9, wo zu setzen ist $9\Delta_3 = m$; $9\Delta_2 = n$; $9\Delta_1 = l$; $9\Delta_0 = k$.

Digitized by Google

Nach § 2 war für die Parameterwerte t_1 und t_2 des Doppelpunktes:

$$t_1 t_2 = \frac{p_3}{p_1}; \qquad t_1 + t_2 = -\frac{p_5}{p_3}.$$

Aus obigen Gleichungen ist aber für die Koordinaten des Doppelpunktes:

$$p_1 J + p_3 K = 0 \quad \text{und} \quad p_5 K + p_3 H = 0.$$

Also folgt:

$$\frac{p_3}{p_1} = -\frac{J}{K} = \frac{kn - l^2}{lm - n^2}; \qquad \frac{p_5}{p_3} = -\frac{H}{K} = -\frac{mk - ln}{lm - n^2}.$$

Es ist also:

$$t_1 t_2 = \frac{kn - l^2}{lm - n^2} \quad \text{und} \quad t_1 + t_2 = -\frac{mk - ln}{lm - n^2}.$$

t_1 und t_2 sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$t^2(lm - n^2) + t(mk - ln) + (kn - l^2) = 0$$

oder

$$Kt^2 - tH - J = 0. \qquad \text{X.}$$

Diese Gleichung kann auch in Determinantenform geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} t^2 & -t & 1 \\ k & l & n \\ l & n & m \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist die Hessesche Kovariante der kubischen Form IX, nämlich:

$$mt^3 + 3nt^2 + 3lt + k = 0\ ^{1}).$$

Da $u = 0$ und $v = 0$ 2 Linien sind, die sich im Doppelpunkte schneiden, so läfst sich die Gleichung jeder Linie durch diesen Punkt in die Form bringen:

$$\lambda u - v \equiv \lambda J p_1 - K p_6 + p_3(\lambda K - J) = 0.$$

Um die Parameterwerte der Schnittpunkte mit der C_3 zu finden, hat man in Gleichung VIII zu setzen:

$$\alpha_1 = \lambda J; \qquad \alpha_2 = K\lambda - J; \qquad \alpha_3 = -K.$$

Vereinfacht man mit Hilfe der Gleichungen II, so erhält man:

$$-t^3 K l + t^2(lH - nK\lambda) + t(nH\lambda + Jl) + Jn\lambda = 0.$$

Daraus folgt:

$$(t^2 - tH - J)(tl + \lambda n) = 0.$$

Der erste Faktor gleich 0 liefert die Parameterwerte des Doppelpunktes, d. h. in diesen Punkt fallen, wie es sein mufs, 2 Schnittpunkte. Für den Parameter des dritten Schnittpunktes folgt $t = -\frac{n}{l}\lambda$. Hieraus ergiebt sich die geometrische Bedeutung

---

[1]) Salmon: Höhere ebene Kurven, 2. Aufl. S. 242 Nr. 218.

Digitized by Google

des Parameters t. Da $\lambda = \frac{v}{u}$, so ist t proportional dem Verhältnis der Lote, welche von dem zugehörigen Punkt der C_3 auf die Linien u und v gefällt werden können[1]).

Für alle Punkte, deren Parameter bekannt sind, lassen sich demnach die Gleichungen ihrer Verbindungslinien mit dem Doppelpunkt ohne weiteres aufstellen. Man hat aus $t = -\frac{n}{l}\lambda$ den Wert für λ in $\lambda u - v = 0$ einzusetzen. Die Gleichung wird also: $tlu + nv = 0$. So ergeben sich die Gleichungen folgender Linien:

1) Doppelpunkt, dritter Schnittpunkt von p_3 mit C_3: $l^2u - n^2v$.
2) „ Tangentialpunkt von (123): $lu - mv$. XI.
3) „ „ „ (356): $nv - ku$.

Es gelingt ferner leicht, die Gleichungen folgender Linien zu finden:

4) Doppelpunkt, (145): $p_1HJ - p_5K^2 \equiv Hu - \frac{n}{l}Kv$.

5) „ (246): $J^2p_2 + HKp_6 \equiv \frac{l}{n}Ju + Hv$.

6) „ Schnittpunkt von $p_3 + p_4$ und p_2: $(p_3 + p_4)K + p_2H \equiv u + \frac{m}{l}v$.

7) „ „ „ $p_3 + p_4$ „ p_5: $(p_3 + p_4)J - p_5H \equiv \frac{k}{n}u + v$.

8) „ (25): $Jp_2 + Kp_5 \equiv \frac{lu}{n} + \frac{nv}{l}$.

9) „ (16): $J^2p_1 - K^2p_6 \equiv Ju - Kv$.

10) „ (34): $p_4JK + p_3(JK + H^2) \equiv \frac{k}{n}Ku + \frac{m}{l}Jv$.

11) Tangente an S_3 im Doppelpunkt (§ 6):

$$J^2p_1 + 2JKp_3 + K^2p_6 \equiv Ju + Kv \equiv K\left(\frac{Jn}{Kl}lu + nv\right).$$

Aus letzterer Form folgt, dafs der Parameter des dritten Schnittpunktes dieser Tangente mit der C_3 durch $t = \frac{nJ}{Kl}$ gegeben ist.

Die Linien 9) und 11) sind zu u und v harmonisch, was auch geometrisch bewiesen werden kann. Ebenso sind u, v, 6) und 2) und u, v, 7) und 3) je 4 harmonische Strahlen.

Setzt man in X $t = -\frac{nv}{lu}$, so erhält man:

$$n^2v^2K + nlHuv - l^2Ju^2 = 0$$

als Gleichung des Tangentenpaares im Doppelpunkt.

---

[1]) Rosenow: S. 20.

Digitized by Google

§ 9. Andere Formen der Gleichung der C_3.

Die in den beiden vorigen Paragraphen gegebenen Formeln erlauben es, eine ganze Reihe von Eigenschaften der C_3 abzuleiten. Es möge jedoch an dieser Stelle genügen, einige Entwicklungen zu geben, die dazu führen, die Gleichung der C_3 in anderen Formen darzustellen. Zuerst stelle man sich die Aufgabe, die Gleichung nur durch p_3, p_1, p_6 auszudrücken. Salmon: Höhere ebene Kurven § 150 sagt: „Wenn eine gerade Linie $A=0$ die Kurve in 3 Punkten A, A′, A″ schneidet, so schneiden die Tangenten der Kurve in diesen Punkten:

$$D=0, \qquad E=0, \qquad F=0$$

die Kurve respektive in 3 weiteren Punkten C, C′, C″, welche in einer geraden Linie $C=0$ liegen. Die Gleichung der Kurve kann in die Form:

$$DEF-\nu A^2C=0$$

gebracht werden. Der Punkt C, in welchem die Tangente im Punkte A die Kurve schneidet, wird der Tangentialpunkt von A genannt und die gerade Linie $C=0$ heifst die Begleiterin der Geraden $A=0$.“ Es soll hier die Gleichung der C_3 in die genannte Form wirklich gesetzt werden. Man hat dazu:

$$A=p_3, \qquad D=p_1, \qquad E=p_6.$$

$C=0$ ist die Gleichung der Geraden, die durch die Tangentialpunkte C und C′ von A und A′ geht. Ihre Gleichung ist leicht zu bilden. Die Gleichung jeder Linie, die durch den Punkt C geht, hat nach den Gleichungen XI Nr. 2 die Form: $lu-mv+\lambda p_1 \equiv p_1(lJ+\lambda)-p_3nH-mKp_6$. Eine Gerade durch C_1 hat eine Gleichung von der Form: $vn-ku+\mu p_6 \equiv -kJp_1+p_3lH+p_6(nK+\mu)$. In den letzten Ausdrücken sind durch Anwendung von II die Koeffizienten von p_3 vereinfacht worden. Damit beide Gleichungen dieselbe Linie darstellen, mufs sein:

$$\frac{lJ+\lambda}{n}=\frac{kJ}{l}; \qquad \frac{mK}{n}=\frac{nK+\mu}{l}.$$

$$\lambda=\frac{J^2}{l}; \qquad \mu=-\frac{K^2}{n}.$$

Also lautet die Gleichung der Begleiterin von p_3:

$$C=p_1Jkn-p_3Hnl-p_6Kml=0.$$

Es ist endlich noch die Gleichung der Tangente in A″, $F=0$ aufzustellen. Da diese Linie durch den Schnittpunkt von l^2u-n^2v und p_3 geht, mufs ihre Gleichung die Form haben:

$$l^2u-n^2v+\lambda p_3 \equiv p_1l^2J+p_3(l^2K-n^2J+\lambda)-n^2Kp_6.$$

Man suche mit Hilfe von VIII die Parameterwerte der Schnittpunkte dieser Linie mit der C_3. Da sie Tangente in A″ ist und da zu A″ der Parameterwert $t=-\frac{l}{n}$ gehört, so mufs in VIII dieser Wert eine Doppelwurzel sein. Es ist aufserdem zu setzen:

$$\alpha_1=l^2J; \qquad \alpha_2=l^2K-n^2J+\lambda; \qquad \alpha_3=-n^2K.$$

Digitized by Google

Es mufs also sein:

$$\left(t+\frac{l}{n}\right)^2(t-t_1)\equiv t^3+t^2\left(\frac{k}{l}-\frac{n}{l}\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)+t\left(\frac{m}{l}\frac{\alpha_1}{\alpha_3}-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)+\frac{n\alpha_1}{l\alpha_3}.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von t^0 und t^2 folgt:

$$-\frac{l^2}{n^2}t_1=+\frac{n}{l}\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=-\frac{n}{l}\cdot\frac{l^2J}{n^2K};\qquad \frac{2l}{n}-t_1=\frac{k}{l}+\frac{n}{l}\frac{\alpha_2}{n^2K}.$$

$$t_1=\frac{nJ}{lK};\qquad K(l^2-J-t_1nl)=\alpha_2.$$

Setzt man in α_2 den Wert von t_1 ein und benutzt die Gleichungen II, so erhält man:

$$\alpha_2=-2JK-nlH.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente:

$$F=l^2Jp_1-p_3(2JK+Hnl)-p_6Kn^2=0.$$

Der Wert von t_1, welcher den Tangentialpunkt von A'' bestimmt, liefert noch ein bemerkenswertes Resultat. Nach XI 11) hat der dritte Schnittpunkt der Tangente an S_3 im Doppelpunkt denselben Parameter. Der Tangentialpunkt von A'' und dieser Schnittpunkt der Tangente an S_3 im Doppelpunkt mit der Kurve müssen also zusammenfallen. Man kann letztere Beziehung auch geometrisch herleiten, wenn man den Satz: „Wird durch 4 feste Punkte einer C_3 ein Kegelschnitt beschrieben, so geht die gerade Verbindungslinie der zwei übrigen Schnittpunkte derselben mit der C_3 durch einen festen Punkt der Kurve“,[1]) auf den Kegelschnitt S_3 anwendet.

Die Gleichung $F=0$ läfst sich, wie unmittelbar zu sehen ist, auch so schreiben:

$$l^2Jp_1-p_3(2JK+Hnl)-p_6Kn^2\equiv p_1Jkn-p_3Hnl-p_6Kml-(J^2p_1+2JKp_3+K^2p_6),$$

d. h. $F=C$ — Tangente an S_3 im Doppelpunkt.

Aus dieser Beziehung folgt, dafs F durch den Schnittpunkt von $C=0$ und der Tangente an S_3 geht, d. h. dafs die Tangentialpunkte dreier Kurvenpunkte in gerader Linie wieder in einer Geraden liegen, der Begleiterin, wie anfangs behauptet wurde.

Die Gleichung der C_3 sollte sich in die Form bringen lassen:

$$DEF-\nu A^2C=0.$$

Setzt man die Werte ein, so erhält man, wie leicht zu bestätigen:

$$p_1p_6[l^2Jp_1-p_6Kn^2-p_3(2JK+Hnl)]-p_3^2[nkp_1J-p_3nlH-p_6lmK]$$

$$\equiv n^2l^2\begin{vmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ p_2 & p_3+p_4 & p_5\\ p_3 & p_5 & p_6\end{vmatrix}=0. \qquad \text{XIII.}$$

Eine andere leicht hieraus abzuleitende Form ist:

$$(p_1p_6-p_3^2)(Jp_1kn-Klmp_6-nlHp_3)-p_1p_6(p_1J^2+p_6K^2+p_32JK)=0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser letzten Form ist unmittelbar ersichtlich.

---

[1]) Salmon: Höhere ebene Kurven. § 155 und 156.

Digitized by Google

Man kann obige Gleichung auch direkt mit Hilfe der Gleichungen 3. 4. 5 des § 5 ableiten, wobei man zu einer synthetischen Erzeugung der C_3 gelangt. Die genannten Gleichungen des § 5 lauten:

$$t^2p_1+tp_2+p_3=0; \qquad t^2p_2+t(p_3+p_4)+p_5=0; \qquad t^2p_3+tp_5+p_6=0. \quad \text{XIVa.}$$

In den Ausdrücken p_i sind für x und y die Koordinaten eines beliebigen Kurvenpunktes eingesetzt zu denken. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Doppelpunkt ist gegeben durch: $tlu+nv=0$ (§ 8).

Eliminiert man t aus einer der obigen Gleichungen und aus $tlu+nv=0$, so erhält man die Gleichung der C_3 in drei verschiedenen Formen, nämlich:

$$p_1n^2v^2-p_2uvnl+p_3u^2l^2=0; \qquad p_2n^2v^2-(p_3+p_4)uvnl+p_5u^2l^2=0; \qquad p_3n^2v^2-p_5uvnl+p_6u^2l^2=0. \quad \text{XIV.}$$

Wenn man die erste der Gleichungen XIVa mit p_2, die zweite mit p_1 multipliziert und dann subtrahiert, so erhält man:

$$t\{p_2^2-p_1(p_3+p_4)\}+p_2p_3-p_1p_5=0 \quad \text{oder} \quad -tS_1+S_2=0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnittbüschel dar, dessen Grundpunkte die Durchschnittspunkte von $S_1=0$ und $S_2=0$ sind. Dieser Büschel ist zu dem Strahlenbüschel der Linien $tlu+nv=0$ projektivisch. Der Schnittpunkt entsprechender Elemente beider Büschel, d. h. solcher, die zu demselben Wert von t gehören, liefert die C_3, deren Gleichung also auch geschrieben werden kann:

$$S_1nv+S_2lu=0.$$

In ähnlicher Weise kann die C_3 noch erzeugt werden als Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente des Strahlenbüschels $tlu+nv=0$, das den Doppelpunkt zum Scheitel hat, mit den Kegelschnittbüscheln $tS_2-S_3=0$ oder $tS_3+S_5=0$ oder $tS_5+S_6=0$. Es verdient bemerkt zu werden, dafs die erwähnten Kegelschnittbüschel die Eigenschaft haben, dafs 2 oder 3 ihrer Grundpunkte zusammenfallen, nämlich entweder in den Punkt (123) oder (356).

Der Anblick der Gleichungen XIV lehrt sofort, dafs der Schnittpunkt der Linien $u=0$, $v=0$ ein Doppelpunkt der C_3 ist. Eliminiert man aus diesen 3 Gleichungen n^2v^2, $uvnl$, u^2l^2 linear, so erhält man wieder die Gleichung VI.

Würde man in der ersten der Gleichungen XIV p_2 nach III durch p_1 und p_3 ausdrücken und nach IXa setzen:

$$u=Jp_1+Kp_3; \qquad v=Kp_6+Jp_3,$$

so erhielte man die Gleichung XIII wieder.

Da $np_2=lp_1+mp_3$ (nach III) und da $u-Kp_3=Jp_1$, so erhält man durch Einführung dieser Werte in die erste der Gleichungen XIV eine andere, die nur u, v und p_3 enthält. Diese Gleichung, deren Form nach der geometrischen Bedeutung von u, v und p_3 vorauszusehen ist, lautet:

$$uv(l^2u-n^2v)-p_3(u^2l^2J-uvnlH-v^2n^2K)=0. \qquad \text{XV.}$$

Die letzte Klammer stellt die Gleichung des Tangentenpaares im Doppelpunkt dar, siehe

Digitized by Google

Gleichung XII. Man hat die Identität, die man durch Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Glieder leicht bestätigen kann:

$$uv(l^2u-n^2v)-p_3(u^2l^2J-uvnlH-v^2n^2K)\equiv -JKl^2n^2\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ p_2 & p_3+p_4 & p_5\\ p_3 & p_5 & p_6\end{vmatrix}.$$

§ 10. Die Tangentialgleichung der C_3

Es sei wieder:

$$x=\frac{at^3+bt^2+ct+d}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}=\frac{f_1}{f_3};\qquad y=\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}=\frac{f_2}{f_3}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte (xy) lautet bekanntlich:

$$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x),$$

wo ξ und η laufende Koordinaten eines Punktes bedeuten.

Es ist $\frac{dy}{dx}=\frac{f_3f_2'-f_2f_3'}{f_3f_1'-f_1f_3'}$, wo f' eine Differentiation nach t anzeigen soll. Die Gleichung der Tangente wird, wenn $x=\frac{f_1}{f_3}$, $y=\frac{f_2}{f_3}$ gesetzt wird:

$$\xi(f_3f_2')+\eta(f_3'f_1)+(f_2f_1')=0.$$

Man bilde:

$$(f_3f_2')=f_3f_2'-f_2f_3'=(\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta)(3At^2+2Bt+C)-(At^3+Bt^2+Ct+D)(3\alpha t^2+2\beta t+\gamma).$$

Löst man die Klammern auf, ordnet nach Potenzen von t und benutzt die Bezeichnungen des § 1, so erhält man:

$$f_3f_2'-f_3f_2'=t^4q_1+2t^3q_2+t^2(q_4+3q_3)+2tq_5+q_6.$$

Ebenso wird:

$$f_3f_1'-f_1f_3'=t^4r_1+2t^3r_2+t^2(r_4+3r_3)+2tr_5+r_6.$$
$$f_1f_2'-f_2f_1'=t^4p_1+2t^3p_2+t^2(p_4+3p_3)+2tp_5+p_6.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung der Tangente ein und ordnet nach Potenzen von t, so ergiebt sich:

$$t^4(p_1+q_1\xi+r_1\eta)+2t^3(p_2+q_2\xi+r_2\eta)+t^2[p_4+\ldots+3(p_3+\ldots)]$$
$$+2t(p_5+q_5\xi+r_5\eta)+p_6+q_6\xi+r_6\eta=0.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente in einem Punkte der Kurve, dessen Parameter t ist. Betrachtet man ξ, η als einen gegebenen Punkt, so bestimmen sich aus dieser Gleichung die Parameter der Berührungspunkte der Tangenten, die von ξ, η an die Kurve gezogen werden können. Da diese Gleichung vom vierten Grade ist, so lassen sich von einem Punkt an die C_3 4 Tangenten ziehen, d. h. die Kurve ist von der vierten Klasse. Für die laufenden Koordinaten werde wieder x, y gesetzt und es bedeute p_i wieder $p_i+q_ix+r_iy$. Die Tangentialgleichung der Kurve lautet alsdann:

$$t^4p_1+2t^3p_2+t^2(p_4+3p_3)+2tp_5+p_6=0. \qquad \text{XVI.}$$

Digitized by Google

§ 11. Die Diskriminante der Tangentialgleichung.

Jeder Punkt auf der Kurve besitzt eine bestimmte Tangente und von den 4 möglichen Tangenten an die Kurve fallen für einen solchen Punkt 2 in diese Tangente selbst, so dafs man von einem Punkt der Kurve nur noch 2 Tangenten an dieselbe ziehen kann. Für einen Punkt der Kurve mufs also die Gleichung XVI eine Doppelwurzel besitzen. „Man erhält daher auch bis auf einen Faktor die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten, wenn man die Diskriminante dieser Gleichung gleich Null setzt." Dieser letztere Satz findet sich in den „Vorlesungen über Geometrie" von Clebsch, herausgegeben von Lindemann, I. Band, S. 888. Die Ableitung der Kurvengleichung nach dieser Methode wird dort aber nur für Unikursalkurven zweiter Ordnung gegeben. Sie läfst sich aber auch leicht für Unikursalkurven dritter Ordnung durchführen und liefert die geometrische Bedeutung des fremden Faktors. Man gelangt auf diesem Wege zu den Wendepunkten der C_3.

Die biquadratische Binärform:

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = 0$$

besitzt die beiden Invarianten[1]):

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2; \qquad T = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3.$$

Die Diskriminante Δ der biquadratischen Binärform ist dann gegeben durch:

$$\Delta = S^3 - 27T^2.$$

Um Gleichung XVI mit der biquadratischen Binärform identisch zu machen, ist zu setzen:

$$a_0 = p_1, \qquad a_1 = \frac{1}{2}p_2, \qquad a_2 = \frac{p_4 + 3p_3}{6}, \qquad a_3 = \frac{1}{2}p_5, \qquad a_4 = p_6.$$

Demnach wird:

$$S = p_1 p_6 - p_2 p_5 + \frac{(p_4 + 3p_3)^2}{12} = -p_3 p_4 + \frac{(p_4 + 3p_3)^2}{12} = \frac{1}{12}(p_4 - 3p_3)^2;$$

denn nach IV ist $p_1 p_6 - p_2 p_5 = -p_3 p_4$.

$$T = p_1 p_6 \frac{p_4 + 3p_3}{6} + \frac{p_2 p_5 (p_4 + 3p_3)}{12} - \frac{p_1 p_5^2}{4} - \frac{p_6 p_2^2}{4} - \left(\frac{p_4 + 3p_3}{6}\right)^3$$

$$= \frac{1}{6^3}\{36 p_1 p_6 (p_4 + 3p_3) + 18 p_2 p_5 (p_4 + 3p_3) - 54 p_1 p_5^2 - 54 p_6 p_2^2 - (p_4 + 3p_3)^3\}.$$

Es ist aber:

$$(p_4 + 3p_3)^3 \equiv (p_4 - 3p_3)^3 + 18 p_3 p_4^2 + 54 p_3^3.$$

Führt man dies ein, so kann man schreiben:

$$T = \frac{1}{6^3}\{A - (p_4 - 3p_3)^3\},$$

wo gesetzt ist:

$$A = 36 p_1 p_6 (p_4 + 3p_3) + 18 p_2 p_5 (p_4 + 3p_3) - 54 p_1 p_5^2 - 54 p_6 p_2^2 - 18 p_4^2 p_3 - 54 p_3^3.$$

---

[1]) Salmon: Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. 2. Aufl. § 206 u. 207.

Digitized by Google

Es wird also:

$$\Delta = S^3 - 27T^2 = \frac{1}{12^3}(p_4 - 3p_3)^6 - \frac{27}{6^6}[(p_4 - 3p_3)^6 - 2A(p_4 - 3p_3)^3 + A^2]$$

$$= -\frac{27}{6^6}A[A - 2(p_4 - 3p_3)^3].$$

Die Diskriminante wird also in der That in 2 Faktoren zerlegbar, die in den p_i vom dritten Grade sind. Ist $\Delta = 0$, d. h. hat Gleichung XVI eine Doppelwurzel, so ist entweder:

$$A = 0 \quad \text{oder} \quad A - 2(p_4 - 3p_3)^3 = 0.$$

Man forme den Ausdruck A dadurch um, dafs man $p_2p_5 = p_1p_6 + p_3p_4$ setzt und die dadurch entstehende Klammer auflöst. Das Glied $18p_4^2p_3$ fällt fort und man erhält:

$$A = 54\{p_1p_6(p_4 + 3p_3) - p_1p_5^2 - p_6p_2^2 - p_3^3 + p_3^2p_4\}.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist nichts anderes als die Gleichung VI, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man z. B.

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 + p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Zeile auflöst und $p_2p_5 = p_1p_6 + p_3p_4$ setzt.

$A = 0$ liefert also die Gleichung der Kurve als Ort der Punkte, für die 2 Tangenten zusammenfallen. $A - 2(p_4 - 3p_3)^3$ wird, wenn man die Klammer auflöst und $p_4p_3 = p_2p_5 - p_1p_6$ setzt:

$$2[9p_1p_6(2p_4 + 9p_3) - 27p_1p_5^2 - 27p_6p_2^2 + p_4(9p_2p_5 - p_4^2)].$$

Dieser Ausdruck läfst sich durch folgende Determinante darstellen:

$$A - 2(p_4 - 3p_3)^3 = 2\begin{vmatrix} 3p_1 & 3p_2 & p_4 \\ 3p_2 & 9p_3 + p_4 & 3p_5 \\ p_4 & 3p_5 & 3p_6 \end{vmatrix}. \qquad \text{XVII.}$$

Diese Determinante gleich Null gesetzt stellt ebenfalls eine Kurve dritter Ordnung dar. Für alle ihre Punkte fallen 2 von den 4 möglichen Tangenten an die ursprüngliche Kurve zusammen. Diese Bedingung wird erfüllt für einen beliebigen Punkt einer Wendetangente, denn eine solche Tangente rechnet doppelt unter den Tangenten der Kurve. Die Gleichung XVII ist also das Produkt der Gleichungen der 3 Wendetangenten; sie mufs in 3 lineare Faktoren zerlegbar sein. Diese Zerlegung wird später (§ 13) gegeben werden.

§ 12. Die Wendepunkte der C_3.

Für einen Wendepunkt einer Kurve fallen 3 Tangenten von den an die Kurve zu ziehenden in die Wendetangente. Man wird also die Wendepunkte der C_3 erhalten, wenn man diejenigen Punkte aufsucht, für welche drei Wurzeln der Gleichung XVI in eine zusammenfallen. Die algebraischen Bedingungen für diesen Fall sind $S = 0$; $T = 0$.

Digitized by Google

Es war:

$$S = \frac{1}{12}(p_4 - 3p_3)^3 \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{6^3}\{A - (p_4 - 3p_3)^2\}.$$

Also wird $p_4 - 3p_3 = 0$ und $A = 0$. Die betreffenden Punkte sind also als Durchschnitte zweier geometrischen Örter bestimmt. Sie liegen auf $A = 0$, d. h. auf der C_3, da ja nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen $A = 54$ mal der durch VI ausgedrückten Kurvengleichung war. Sie liegen aufserdem auf einer geraden Linie, deren Gleichung $p_4 - 3p_3 = 0$ lautet.

Es ergiebt sich also der Satz:

„Die Wendepunkte einer Unikursalkurve dritter Ordnung liegen auf einer geraden Linie, deren Gleichung $p_4 - 3p_3 = 0$ ist."

Man kann sich die Aufgabe stellen, nach der Methode des § 7 die Parameter der Schnittpunkte der Linie $p_4 - 3p_3$ mit der C_3 zu bestimmen.

Setzt man in $p_4 - 3p_3 + x(q_4 - 3q_3) + y(r_4 - 3r_3) = 0$ die Werte von x und y durch t ausgedrückt ein, so erhält man die Gleichung:

$$t^3[\alpha p_4 + a q_4 + A r_4 - 3(\alpha p_3 + a q_3 + A r_3)] + t^2[\beta p_4 + \ldots - 3(\beta p_3 + \ldots)]$$
$$+ t[\gamma p_4 + \ldots - 3(\gamma p_3 + \ldots)] + \delta p_4 + \ldots - 3(\delta p_3 + \ldots) = 0.$$

Wendet man die Gleichungen I an, so folgt:

$$t^3 m + 3t^2 n + 3tl + k = 0.$$

Dies ist aber Gleichung IX, die sich im § 7 auf ganz anderem Wege ergeben hatte. Setzt man in der letzten Gleichung nach § 8 $t = -\frac{nv}{lu}$, so erhält man das Produkt der Gleichungen der Verbindungslinien der Wendepunkte mit dem Doppelpunkt in der Form:

$$u^3 l^3 k - 3u^2 v n l^3 + 3u v^2 n^3 l - n^3 m v^3 = 0.$$

Folglich mufs die Gleichung der C_3 sich in der Form ausdrücken lassen:

$$u^3 l^3 k - 3u^2 v n l^3 + 3u v^2 n^3 l - n^3 m v^3 + \lambda(p_4 - 3p_3)(u^2 l^2 J - u v n l H - n^2 v^2 K) = 0\ ^1).$$

Diese Gleichung läfst sich auch aus XV ableiten, wodurch sich zugleich die Konstante λ bestimmt. Es ist nämlich:

$$u = p_1 J + p_3 K; \quad v = K p_6 + J p_3; \quad \text{also} \quad p_1 = \frac{1}{J}(u - p_3 K); \quad p_6 = \frac{1}{K}(v - J p_3).$$

Mit Hilfe der Gleichungen III läfst sich leicht ableiten:

$$p_4 - 3p_3 = \frac{k l p_1 + m n p_6 + m k p_3 - 3 n l p_3}{nl}.$$

Setzt man die obigen Werte für p_1 und p_6 ein, so erhält man nach einigen Umformungen durch die Gleichungen II:

$$p_4 - 3p_3 = \frac{k}{nJ}u + \frac{m}{lK}v - p_3\frac{H^2 + 4JK}{JK}. \qquad \text{XVIII.}$$

---

[1]) Salmon: Höhere ebene Kurven. 2. Aufl. § 149.

Digitized by Google

Multipliziert man XV mit $\frac{H^2+4JK}{JK}$ und setzt:

$$p_3\frac{H^2+4JK}{JK}=\frac{k}{nJ}u+\frac{m}{lK}v-(p_4-3p_3),$$

so ergiebt sich mit Benutzung der Gleichungen II die gesuchte Kurvengleichung in der Form:

$$u^3l^2k-3u^2vnl^2+3uv^2n^2l-n^3mv^2-nl(p_4-3p_3)(u^2l^2J-uvnlH-n^2v^2K)=0. \quad XIX.$$

Es ist $XIX\equiv\frac{nl}{JK}(H^2+4JK)XV.$

Der Faktor H^2+4JK ist von besonderer Bedeutung für die Kurve. Er ist die Diskriminante der Gleichung X. Ist $\Delta=H^2+4JK=0$, so wird der Doppelpunkt zur Spitze, denn die Doppelpunktstangenten fallen dann, wie Gleichung XII zeigt, in eine zusammen. Gleichung XVIII lehrt, dafs die Wendepunktslinie in diesem Falle durch die Spitze geht, also liegen 2 Wendepunkte in der Spitze. Eine C_3 mit Spitze besitzt nur noch einen Wendepunkt. Ist Δ positiv, so sind die Tangenten im Doppelpunkt reell ist Δ negativ, so sind diese Tangenten imaginär. Der Doppelpunkt ist im letztern Falle ein isolierter Punkt. Die zugehörigen Parameterwerte werden allerdings auch imaginär. Aber die Linien $u=0$ und $v=0$, welche den Doppelpunkt zum Schnittpunkt haben bleiben reell, also auch der Schnittpunkt selbst.

Gleichung X war die Hessesche Kovariante von Gleichung IX (§ 8). Ist aber die Diskriminante der Hesseschen Kovariante einer kubischen Binärform positiv, so läfst sich diese Binärform in einen reellen und 2 imaginäre Faktoren zerlegen[1]); ist diese Diskriminante negativ, so läfst sich die Binärform in 3 reelle Faktoren zerlegen. Wenn also Δ positiv ist, so existiert ein eigentlicher Doppelpunkt und nur ein reeller Wendepunkt. Ist Δ negativ, so hat die C_3 einen isolierten Punkt und 3 reelle Wendepunkte.

§ 13. Die kanonische Form der Kurvengleichung.

Nach § 8 ist die Gleichung des Tangentenpaares im Doppelpunkt:

$$u^2l^2J-v^2n^2K-nluvH=0$$

die Hessesche Form der Gleichung $u^3l^2k-3u^2vnl^2+3uv^2n^2l-n^3mv^3$, welche gleich Null gesetzt die 3 Verbindungslinien des Doppelpunktes mit den Wendepunkten liefert.

Die erste Gleichung läfst sich in die Faktoren α_1 und α_2 zerlegen, nämlich:

$$\frac{1}{J}\left\{ulJ-\frac{nv}{2}(H+\sqrt{\Delta})\right\}\left\{ulJ-\frac{nv}{2}(H-\sqrt{\Delta})\right\}=\frac{1}{J}\alpha_1\alpha_2.$$

Nach der Fundamentaleigenschaft der Hesseschen Form einer kubischen Binärform, mufs sein:

---

[1]) Salmon: Vorlesungen über die Algebra der linear. Transform. 2. Aufl. § 167 und für das Folgende § 166.

Digitized by Google

$$\alpha\left\{\mathrm{ulJ}-\frac{\mathrm{nv}}{2}(\mathrm{H}+\sqrt{\Delta})\right\}^2+\beta\left\{\mathrm{ulJ}-\frac{\mathrm{nv}}{2}(\mathrm{H}-\sqrt{\Delta})\right\}^2 \qquad \text{XX.}$$
$$\equiv \mathrm{u^3l^3k}-3\mathrm{u^2vnl^2}+3\mathrm{uv^2n^2l}-\mathrm{n^3mv^3}.$$

Vergleicht man die Koeffizienten entsprechender Glieder in u und v, so bestimmen sich α und β. Man erhält:

$$\alpha=\frac{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}-\mathrm{H})+2\mathrm{Jl}}{2\mathrm{J}^3\sqrt{\Delta}}; \qquad \beta=\frac{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}+\mathrm{H})-2\mathrm{Jl}}{2\mathrm{J}^3\sqrt{\Delta}}.$$

Demnach erhält die Gleichung der Kurve, wie sie durch Gleichung XIX gegeben ist, folgende Form:

$$2\mathrm{J}^3\sqrt{\Delta}\left\{\mathrm{u^3l^3k}-3\mathrm{u^2vnl^2}+3\mathrm{uv^2n^2l}-\mathrm{n^3mv^3}-\mathrm{nl}(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})(\mathrm{u^2l^2J}-\mathrm{v^2n^2K}-\mathrm{uvnlH})\right\} \qquad \text{XXI.}$$
$$\equiv[\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}-\mathrm{H})+2\mathrm{Jl}]\alpha_1^3+[\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}+\mathrm{H})-2\mathrm{Jl}]\alpha_2^3-2\mathrm{J}^2\mathrm{nl}(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})\sqrt{\Delta}\,\alpha_1\alpha_2.$$

Dies ist nach Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, I. Band S. 584 die kanonische Form der Kurvengleichung. $\alpha_1=0$ und $\alpha_2=0$ sind die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkt, $\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3}=0$ ist die Gleichung der Wendepunktslinie.

Es ist nun leicht zu zeigen, dafs die Gleichung XVII, welche die 3 Wendetangenten darstellt, in 3 lineare Faktoren zerlegbar ist. Diese Gleichung, sie werde abkürzend durch $\mathrm{D_3}$ bezeichnet, läfst sich, abgesehen vom Faktor 2, schreiben:

$$\mathrm{D_3}=27\,\mathrm{C_3}-(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})^3,$$

wo $\mathrm{C_3}$ die Determinante VI bedeutet.

Es ist aber, wie bei XV und XIX angegeben ist,

$$-\mathrm{C_3n^2l^2}\Delta = \text{der linken Seite von XIX.}$$

Also wird, da $\mathrm{XIX}=\frac{1}{2\mathrm{J}^3\sqrt{\Delta}}\cdot\mathrm{XXI}$,

$$\mathrm{D_3}\cdot 2\mathrm{J^3n^3l^3}\sqrt{\Delta}^3=-27\alpha_1^3\{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}-\mathrm{H})+2\mathrm{Jl}\}-27\alpha_2^3\{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}+\mathrm{H})-2\mathrm{Jl}\}$$
$$+54\mathrm{J^3nl}(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})\sqrt{\Delta}\,\alpha_1\alpha_2-2\mathrm{n^3l^3}\sqrt{\Delta}^3\mathrm{J^3}(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})^3.$$

Man setze:

$$\xi_1=3\alpha_1\sqrt[3]{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}-\mathrm{H})+2\mathrm{Jl}}; \qquad \xi_2=3\alpha_2\sqrt[3]{\mathrm{k}(\sqrt{\Delta}+\mathrm{H})-2\mathrm{Jl}}; \qquad \mathrm{x_3}=\frac{\mathrm{nlJ}\sqrt{\Delta}\,(\mathrm{p_4}-3\mathrm{p_3})}{\sqrt[3]{4}}.$$

Alsdann erhält man:

$$\mathrm{D_3}\cdot 2\mathrm{J^3n^3l^3}\sqrt{\Delta}^3=-\{\xi_1^3+\xi_2^3-6\xi_1\xi_2\mathrm{x_3}+8\mathrm{x_3^3}\}$$
$$\equiv-(\xi_1+\xi_2+2\mathrm{x_3})(\xi_1+\varepsilon\xi_2+2\varepsilon^2\mathrm{x_3})(\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+2\varepsilon\mathrm{x_3}),$$

wo ε eine imaginäre Kubikwurzel der Einheit bedeutet, also $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ ist.

$\mathrm{D_3}$ ist also in 3 lineare Faktoren zerlegt, die Gleichungen der 3 Wendetangenten. Hiermit ist gezeigt, wie man ausgehend von der allgemeinen Parameterdarstellung bis zur kanonischen Form der Kurvengleichung gelangen kann. In dieser Form treten nur

Digitized by Google

die Gröfsen k, l, m, n und die daraus abgeleiteten H, J, K auf. Zur Ableitung weiterer Eigenschaften der Kurve wird man sich der kanonischen Form bedienen, welche lautet:

$$\xi_1^3 + \xi_2^3 - 6\xi_1\xi_2 x_3 = 0. \qquad \text{XXII.}$$

Dieselbe liefert die Parameterdarstellung (siehe Clebsch: S. 586):

$$\xi_1 = -6\lambda^2; \qquad \xi_2 = 6\lambda; \qquad x_3 = \lambda^3 + 1.$$

Einige Beispiele für die Anwendung dieser Form finden sich am Schlusse dieser Abhandlung.

§ 14. Kurven mit gemeinsamem Fundamentalsystem.

In den bisherigen Untersuchungen wurde die Unikursalkurve dritter Ordnung in Verbindung mit dem Fundamentalsystem der 6 Linien p gebracht. So vielseitig auch die Beziehungen der Kurve zu diesem Fundamentalsystem waren, so reichten sie doch nicht aus, den Doppelpunkt geometrisch zu bestimmen. Es entsteht die Frage: Ist der Doppelpunkt der betrachteten C_3 ein in Bezug auf das Fundamentalsystem geometrisch bestimmter Punkt? Daraus ergiebt sich sofort die weitere Frage: Wie viele C_3 giebt es, die zu einem gegebeuen Fundamentalsystem gehören? Die Gleichungen des § 3, welche die Koordinaten der 4 Fundamentalpunkte als Schnittpunkte der 6 Linien p liefern, zeigen, dafs durch sie nur die Verhältnisse entsprechender Koeffizienten (a, A, α) in der Parameterdarstellung bestimmt sind. Multipliziert man also entsprechende Koeffizienten mit demselben Faktor ϱ, so erhält man Kurven, welche zu demselben Fundamentalsystem gehören. Die allgemeine Parameterdarstellung einer solchen Kurve würde also sein:

$$x = \frac{\varrho_1 a t^3 + \varrho_2 b t^2 + \varrho_3 c t + \varrho_4 d}{\varrho_1 \alpha t^3 + \varrho_2 \beta t^2 + \varrho_3 \gamma t + \varrho_4 \delta}; \qquad y = \frac{\varrho_1 A t^3 + \varrho_2 B t^2 + \varrho_3 C t + \varrho_4 D}{\varrho_1 \alpha t^3 + \varrho_2 \beta t^2 + \varrho_3 \gamma t + \varrho_4 \delta}. \qquad \text{XXIII a.}$$

In dieser Darstellung kommen jedoch in Wirklichkeit nur 2 neue Konstante vor. Man kann stets $\varrho_4 = 1$ setzen. Aufserdem kann immer so transformiert werden, dafs der Koeffizient von t^1 nur c, C, γ respektive wird. Eine weitere Transformation ist nicht erlaubt, da sonst $t = \infty$ und $t = 0$ nicht mehr die Punkte (123) und (356) ergeben würden. Man setze also $\varrho_2 t = t_1$. Dann wird der Zähler von x:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2^3} a t_1^3 + \frac{\varrho_2}{\varrho_2^2} b t_1^2 + c t_1 + d.$$

Setzt man endlich $\sigma_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2^3}$ und $\sigma_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_2^2}$ und schreibt wieder t statt t_1, so erhält man als allgemeine Parameterdarstellung der zu demselben Fundamentalsystem gehörenden Kurven:

$$x = \frac{\sigma_1 a t^3 + \sigma_2 b t^2 + c t + d}{\sigma_1 \alpha t^3 + \sigma_2 \beta t^2 + \gamma t + \delta}; \qquad y = \frac{\sigma_1 A t^3 + \sigma_2 B t^2 + C t + D}{\sigma_1 \alpha t^3 + \sigma_2 \beta t^2 + \gamma t + \delta}. \qquad \text{XXIII.}$$

Da σ_1 und σ_2 unabhängige Gröfsen sind, so bilden die durch diese Gleichungen dargestellten Kurven ein Netz. Die Festsetzung einer Beziehung zwischen diesen Gröfsen liefert einen Kurvenbüschel (Salmon, Höhere ebene Kurven, § 163). Zwei Beziehungen zwischen den σ bestimmen eine endliche Anzahl Kurven.

Digitized by Google

Setzt man in die Gleichungen des § 1 statt a, A, α ein $\sigma_1 a$, $\sigma_1 A$, $\sigma_1 \alpha$ und statt b, B, β $\sigma_1 b$, $\sigma_1 B$, $\sigma_1 \beta$, so erhält man die entsprechenden Ausdrücke:

$$P_1 = \sigma_1\sigma_2 p_1, \quad P_2 = \sigma_1 p_2, \quad P_3 = \sigma_1 p_3, \quad P_4 = \sigma_2 p_4, \quad P_5 = \sigma_2 p_5, \quad P_6 = p_6.$$
$$m_1 = \sigma_1\sigma_2 m, \quad n_1 = \sigma_1\sigma_2 n, \quad l_1 = \sigma_1 l, \quad k_1 = \sigma_2 k. \qquad \text{XXIV.}$$
$$H_1 = \sigma_1\sigma_2(\sigma_2 mk - \sigma_1 ln), \quad K_1 = \sigma_1^2\sigma_2(\sigma_2 n^2 - lm), \quad J_1 = \sigma_1(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2).$$

Eine allgemeine Eigenschaft kommt allen Kurven sofort zu: die Wendepunktslinie einer beliebigen Kurve des Netzes geht durch einen festen Punkt, nämlich durch den Schnittpunkt von p_3 und p_4. Denn die Gleichung der Wendepunktslinie lautet:

$$P_4 - 3P_3 = \sigma_2 p_4 - 3\sigma_1 p_3 = 0.$$

Für beliebige Werte der σ stellt diese Gleichung eine Linie durch den Schnittpunkt von p_4 und p_3 dar.

Der Doppelpunkt war der Schnittpunkt der Linien u und v, also hat man als geometrische Örter des Doppelpunktes die Gleichungen:

$$P_1 J_1 + P_3 K_1 \equiv \sigma_1^3\sigma_2\{p_1(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2) + \sigma_1 p_3(\sigma_2 n^2 - lm)\}.$$
$$K_1 P_6 + J_1 P_3 \equiv \sigma_1^2\{\sigma_2 p_6(\sigma_2 n^2 - lm) + p_3(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2)\}.$$

Man suche die Bedingungen auf, unter denen eine Kurve des Systems mit der Grundkurve, d. h. mit derjenigen, für welche $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, gemeinsamen Doppelpunkt hat. Dazu mufs sein:

$$P_1 J_1 + P_3 K_1 \equiv \lambda(p_1 J + p_3 K); \qquad P_6 K_1 + P_3 J_1 \equiv \mu(p_6 K + p_3 J),$$

oder mit Anwendung von XXIV:

$$\sigma_1\sigma_2 J_1 = \sigma_1^2\sigma_2(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2) = \lambda J; \qquad K_1 = \sigma_1^2\sigma_2(\sigma_2 n^2 - lm) = \mu K.$$
$$\sigma_1 K_1 = \sigma_1^2\sigma_2(\sigma_2 n^2 - lm) \quad = \lambda K; \qquad \sigma_1 J_1 = \sigma_1^2(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2) = \mu J.$$

Es folgt:

$$\frac{J(\sigma_2 n^2 - lm)}{K(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2)} = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2},$$

also $\sigma_1 = \sigma_2$. Benutzt man dies, so erhält man:

$$\frac{J}{K} = \frac{1}{\sigma_1}\frac{\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2}{\sigma_2 n^2 - lm} = \frac{\sigma_1 kn - l^2}{\sigma_1 n^2 - lm}.$$

$$\sigma_1 J n^2 - Jlm = \sigma_1 Kkn - Kl^2. \qquad \sigma_1 n(Jn - Kk) = l(Jm - Kl).$$

Nach den Gleichungen II ist der Wert der Klammer links lH, derjenige der Klammer rechts nH. Es ergiebt sich also:

$$\sigma_1 = 1, \quad \text{folglich auch} \quad \sigma_2 = 1.$$

Die gesuchte Kurve fällt also mit der Grundkurve zusammen. Man erhält folgenden wichtigen Satz:

Bei dem vorliegenden Fundamentalsystem giebt es nur eine Kurve, die einen gegebenen Punkt zum Doppelpunkt hat.

Digitized by Google

Besteht eine Gleichung zwischen den σ, so erhält man einen Kurvenbüschel, für den man den Ort der Doppelpunkte leicht auffinden kann. Der Doppelpunkt ist der Schnittpunkt der Linien, die dargestellt werden durch:

$$p_1(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2) + \sigma_1 p_3(\sigma_2 n^2 - lm) = 0,$$
$$\sigma_2 p_6(\sigma_2 n^2 - lm) + p_3(\sigma_2^2 kn - \sigma_1 l^2) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen kann man σ_1 und σ_2 in Funktion der p ausrechnen und kann aus jeder Beziehung zwischen σ_1 und σ_2 die entsprechende zwischen den p bilden, welche den Ort des Doppelpunktes liefert.

Man erhält leicht: $\sigma_1 p_3^2 = \sigma_2 p_1 p_6$. Vernachlässigt man den Wert $\sigma_2 = 0$, der dazu führt auch $l = 0$ zu setzen, was einer Spezialisierung des Fundamentalsystems gleichkommt, so erhält man:

$$\sigma_2 = \frac{p_6 p_2}{p_3 p_5}; \qquad \sigma_1 = \frac{p_1 p_6^2}{p_3^2} \frac{p_2}{p_5}.$$

Ist $\sigma_1 = 1$, so ergeben diese Gleichungen als Ort der Doppelpunkte die Kurve vierter Ordnung:

$$p_1 p_2 p_6^2 = p_3^3 p_5.$$

Ist $\sigma_2^3 = \sigma_1$, d. h. ist in XXIIIa $\varrho_1 = \varrho_4$, $\varrho_2 = \varrho_3 = 1$, so ist der Ort der Doppelpunkte die Kurve dritter Ordnung:

$$p_1 p_5^2 = p_6 p_2^2.$$

Ist $\sigma_2 = 1$, so ergiebt sich als Ort der Doppelpunkte der Kegelschnitt S_5; ist $\sigma_1 = \sigma_2^2$, so erhält man den Kegelschnitt S_2 und ist $\sigma_1 = \sigma_2$, so erhält man S_8 als Ort der Doppelpunkte. In letzterem Falle besitzen alle C_3 des Büschels dieselbe Wendepunktslinie.

§ 15. Spezialisierungen des Fundamentalsystems.

Bisher war stets an der allgemeinen Parameterdarstellung festgehalten worden. Es möge zum Schlufs ein kurzer Überblick gegeben werden, welche Vereinfachungen auftreten, wenn von der allgemeinen Darstellung abgewichen wird.

1) Ist:

$$m = \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

so kann man setzen:

$$b = \lambda a + \mu c,$$
$$B = \lambda A + \mu C,$$
$$\beta = \lambda \alpha + \mu \gamma.$$

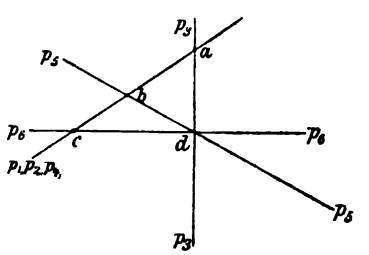

Fig. 2.

λ und μ sind willkürliche Konstante.

Dann wird $n = \mu l$; $k = \lambda l$. Die Gleichungen III geben: $np_2 = lp_1$, $np_4 = kp_1$, $lp_4 = kp_2$. Die Fundamentallinien p_1, p_2, p_4 fallen also zusammen. Das Fundamentalsystem wird durch vorstehende Figur dargestellt.

Digitized by Google

Einer der Parameterwerte der Wendepunkte wird, wie aus Gleichung IX zu ersehen ist, ∞. Also ist (123) ein Wendepunkt der Kurve und p_2 die zugehörige Wendetangente.

2) Ist $k=0$, so erhält man ähnliches. (356) wird ein Wendepunkt und p_6 die zugehörige Wendetangente.

3) Ist $k=0$ und $m=0$, so werden (123) und (356) Wendepunkte, also p_3 die Wendepunktslinie, p_1 und p_6 die zugehörigen Wendetangenten. Es mufs $p_4 \equiv 0$ sein; was sich, da $m=0$, $k=0$, auch aus den Gleichungen I ergiebt, die nur noch möglich sind, wenn $p_4 = q_4 = r_4 \equiv 0$. Diesen letzten Gleichungen kann in allgemeinster Form genügt werden, wenn man setzt:

$$c = \varrho_1 c_1, \qquad C = \varrho_1 c_2, \qquad \gamma = \varrho_1 c_3.$$
$$b = \varrho_2 c_1, \qquad B = \varrho_2 c_2, \qquad \beta = \varrho_2 c_3.$$

ϱ_1, ϱ_2, c_1, c_2, c_3 sind beliebige Konstanten. Die Parameterdarstellung:

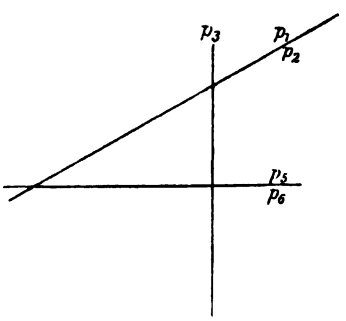

Fig. 3.

$$x = \frac{a t^3 + \varrho_2 c_1 t^2 + \varrho_1 c_1 t + d}{\alpha t^3 + \varrho_2 c_3 t^2 + \varrho_1 c_3 t + \delta}; \quad y = \frac{A t^3 + \varrho_2 c_2 t^2 + \varrho_1 c_2 t + D}{\alpha t^3 + \varrho_2 c_3 t^2 + \varrho_1 c_3 t + \delta}$$

liefert die allgemeinste C_3, welche für $t=0$, $t=\infty$ die Koordinaten zweier Wendepunkte ergiebt. Die Gleichung der Wendepunktslinie wird:

$$(dA - Da) + (D\alpha - A\delta)x + (\delta a - d\alpha)y = 0.$$

Das Fundamentalsystem wird durch nebenstehende Figur gegeben.

Weil p_1 mit p_2 und p_5 mit p_6 zusammenfällt, p_4 identisch Null ist, so übersieht man ohne weiteres, dafs der Ausdruck XVII in drei lineare Faktoren zerlegbar wird; p_1 und p_6 treten, wie es sein mufs, als Faktoren heraus.

4) Ist $l=0$, so fallen p_3, p_2, p_6 in eine Linie, die Tangente an die C_3 im Punkte (356) zusammen. v wird identisch Null. Der Doppelpunkt ergiebt sich als Schnittpunkt der Linien $np_3 + kp_1 = 0$ und $np_5 - mp_6 = 0$.

5) Ist $n=0$, so erhält man ähnliche Resultate. p_3, p_5 und p_1 fallen zusammen.

6) Es bleibt der wichtige Fall, dafs $l=0$ und $n=0$. Alsdann zeigen die Gleichungen III, dafs p_3 identisch Null wird. Man kann also setzen:

$$a = \varrho_1 a_1, \qquad A = \varrho_1 a_2, \qquad \alpha = \varrho_1 a_3.$$
$$d = \varrho_2 a_1, \qquad D = \varrho_2 a_2, \qquad \delta = \varrho_2 a_3.$$

Es sei ferner:

$$P_1 = ba_3 - Ba_1, \qquad P_6 = Ca_1 - ca_2.$$
$$Q_1 = Ba_3 - \beta a_2, \qquad Q_6 = \gamma a_2 - Ca_3.$$
$$R_1 = \beta a_1 - ba_3, \qquad R_6 = ca_3 - \gamma a_1.$$

Digitized by Google

Alsdann wird.

$$p_1 = \varrho_1 P_1, \quad p_5 = -\varrho_2 P_1, \quad p_6 = \varrho_2 P_6, \quad p_2 = -\varrho_1 P_6, \quad \frac{m}{k} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}. \quad H = mk. \quad J = 0. \quad K = 0.$$

Das Fundamentalsystem wird durch die Figur dargestellt.

p_4 wird Wendepunktslinie. Aus den Gleichungen für den Doppelpunkt:

$$np_3 + kp_1 - lp_2 = 0 \quad \text{und} \quad np_5 - lp_3 - mp_6 = 0$$

folgt, dafs der Doppelpunkt der Schnittpunkt von p_1 und p_6 wird.

Die Gleichung der C_3 lautet alsdann:

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 P_1 & \varrho_1 P_6 & 0 \\ \varrho_1 P_6 & p_4 & -\varrho_2 P_1 \\ 0 & -\varrho_2 P_1 & \varrho_2 P_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante giebt entwickelt:

$$\varrho_1 \varrho_2 \{P_1 P_6 p_4 - \varrho_2 P_1^3 - \varrho_1 P_6^3\} = 0.$$

Die Gleichung der C_3 lautet also:

$$\varrho_2 P_1^3 + \varrho_1 P_6^3 - P_1 P_6 p_4 = 0,$$

d. h. sie hat die kanonische Form (§ 13). p_1 und p_6 sind die Tangenten im Doppelpunkt.

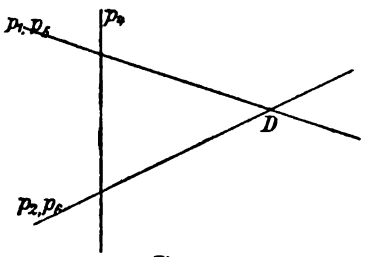

Fig. 4.

Die Parameter der Wendepunkte bestimmen sich aus: $mt^3 + k = 0$, also sind die Parameterwerte:

$$t_1 = -\sqrt[3]{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}, \quad t_2 = -\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}, \quad t_3 = -\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}.$$

Um die Kurvengleichung auf die Form XXII zu bringen, hat man zu setzen:

$$\xi_1 = P_1\sqrt[3]{\varrho_2}, \qquad \xi_2 = P_6\sqrt[3]{\varrho_1}, \qquad x_3 = \frac{1}{6}\frac{p_4}{\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2}}.$$

Die Gleichungen der Wendetangenten waren:

$$\xi_1 + \xi_2 + 2x_3 = 0, \qquad \xi_1 + \varepsilon\xi_2 + 2\varepsilon^2 x_3 = 0, \qquad \xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + 2\varepsilon x_3 = 0.$$

Sie werden also:

$$P_1\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2} + P_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2} + \frac{1}{3}p_4 = 0, \qquad P_1\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2} + \varepsilon P_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2} + \frac{1}{3}\varepsilon^2 p_4 = 0.$$

$$P_1\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2} + \varepsilon^2 P_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2} + \frac{1}{3}\varepsilon p_4 = 0.$$

Setzt man in der Kurvengleichung $p_4 = 0$, so erhält man $\varrho_2 P_1^3 + \varrho_1 P_6^3 = 0$, d. h. die Gleichungen der Linien, die den Doppelpunkt mit den Wendepunkten verbinden, werden:

$$P_1\sqrt[3]{\varrho_2} + P_6\sqrt[3]{\varrho_1} = 0, \qquad P_1\sqrt[3]{\varrho_2} + \varepsilon P_6\sqrt[3]{\varrho_1} = 0, \qquad P_1\sqrt[3]{\varrho_2} + \varepsilon^2 P_6\sqrt[3]{\varrho_1} = 0. \qquad \text{XXVI.}$$

Multipliziert man die Gleichung der ersten Wendetangente mit ε^2 und subtrahiert die Gleichung der zweiten Wendetangente, so fallen die Glieder, die p_4 enthalten, fort

Digitized by Google

und man erhält die Gleichung der Verbindungslinie des Schnittpunktes dieser beiden Wendetangenten mit dem Doppelpunkt in der Form:

$$(\varepsilon^2 - 1)\, P_1 \sqrt[3]{\varrho_1 \varrho_2^2} + (\varepsilon^2 - \varepsilon)\, P_6 \sqrt[3]{\varrho_1^2 \varrho_2} = 0.$$

Da aber $\varepsilon^3 = 1$, so bestätigt man leicht, dafs $\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} = -\varepsilon^2$. Die vorige Gleichung wird also:

$$\sqrt[3]{\varrho_1 \varrho_2} \cdot \{P_1 \sqrt[3]{\varrho_2} - \varepsilon^2 P_6 \sqrt[3]{\varrho_1}\} = 0.$$

Diese Linie bildet demnach mit den durch XXVI dargestellten, wie leicht zu sehen, einen harmonischen Büschel. Sie ist also die harmonische Polare des dritten Wendepunktes. Ähnliche Rechnungen lassen sich für jedes Paar der Wendetangenten anstellen, so dafs der Satz bewiesen ist: Der Schnittpunkt zweier Wendetangenten liegt auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunktes.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 gegeben, so erhält man eine C_3 mit festen Doppelpunktstangenten und gegebener Wendepunktslinie. Sind ϱ_1 und ϱ_2 variabel, so erhält man ein Netz von Kurven mit den genannten Stücken. Besteht eine Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_2, so erhält man einen Büschel von C_3 mit denselben Stücken. Ist $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ konstant, so haben, wie die Gleichungen XXVI zeigen, alle C_3 aufserdem noch gemeinsame Wendepunkte.

Setzt man $\varrho_2 P_1^3 + \varrho_1 P_6^3 - P_1 P_6 p_4 = f$ und bildet mit Hilfe der zweiten Differentialquotienten die Gleichung der Hesseschen Kurve, so erhält man: $H = 3\varrho_2 P_1^3 + 3\varrho_1 P_6^3 + p_4 P_6 P_1$. Für diese Kurve ist also $\varrho_1' = -3\varrho_1$ und $\varrho_2' = -3\varrho_2$. Weil $\varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_1' : \varrho_2'$, so haben beide Kurven gemeinsame Wendepunkte.

Ist $\varrho_1 \varrho_2 = 1$, so kann man die Enveloppe aller C_3 des zugehörigen Büschels bilden, sie wird, abgesehen von der selbstverständlichen Lösung $P_1 P_6 = 0$, $4 P_6 P_1 - p_4^2 = 0$. Dieser Kegelschnitt ist die Cayleysche Kurve, die zu $P_1^3 + P_6^3 - P_1 P_6 p_4 = 0$ als Hessesche Kurve betrachtet gehört (Salmon, § 178). Er ist, wie sich aus der Gleichung X auch ohne Schwierigkeit direkt zeigen läfst, die Enveloppe der Verbindungslinien korrespondierender Punkte von $P_1^3 + P_6^3 - P_1 P_6 p_4 = 0$. Eliminiert man zwischen den beiden letzten Gleichungen p_4, so erhält man:

$$(P_1^3 + P_6^3)^2 = 4 P_1^3 P_6^3 \quad \text{oder} \quad (P_1^3 - P_6^3)^2 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Cayleysche Kurve die C_3 in den 3 Punkten berührt, wo die C_3 von den harmonischen Polaren der 3 Wendepunkte geschnitten wird. Da man $P_1^3 + P_6^3 - P_1 P_6 p_4 = 0$ als Hessesche Kurve zu betrachten hat, so ist die Gleichung der zugehörigen primären C_3:

$$P_1^3 + P_6^3 - 3 p_4 P_1 P_6 = 0.$$

Von der letzteren C_3 sind aber:

$$P_1 + P_6 + p_4 = 0, \qquad P_1 + \varepsilon P_6 + \varepsilon^2 p_4 = 0, \qquad P_1 + \varepsilon^2 P_6 + \varepsilon p_4 = 0$$

die Wendetangenten. Sucht man, durch Elimination von p_4, die Schnittpunkte dieser Linien mit der Cayleyschen Kurve auf, so erhält man z. B. für die erste Wendetangente $(P_1 - P_6)^2 = 0$, d. h. diese Linien berühren die Cayleysche Kurve in den Punkten, wo sie

Digitized by Google

von den harmonischen Polaren geschnitten wird, also sind diese Wendetangenten der primären Kurve die gemeinsamen Tangenten der Hesseschen und der Cayleyschen Kurve (Salmon § 183).

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man mit Hilfe der kanonischen Form Wendepunktseigenschaften der Unikursalkurven dritter Ordnung ableiten kann.

7) Sind von den 4 Determinanten m, n, k, l mehr als 2 Null, so zerfällt die C_3.

8) Ist $J=0$ und $K=0$, ohne dafs auch $n=l=0$, so ist auch $H=0$ (nach II). Die Kurve stellt alsdann einen Kegelschnitt dar, da $at^3+bt^2+\ldots$, $At^3+Bt^2+\ldots$, $\alpha t^3+\ldots$ einen gemeinsamen in t linearen Faktor enthalten.

9) Ist $H=0$, so zeigen die Gleichungen XIa, dafs (25) der Doppelpunkt ist.

10) Ist $J=0$, so folgt aus denselben Gleichungen, dafs (36) der Doppelpunkt ist.

11) Ist $K=0$, so ist (13) der Doppelpunkt.

Die vorstehenden Untersuchungen zeigen zur Genüge, dafs die angewendeten Methoden in ihrer vollen Durchführung nicht nur zu den Grundeigenschaften, sondern auch zu den durch Spezialisierung sich ergebenden Beziehungen der Unikursalkurven dritter Ordnung in einer expliziten Form führen, die für Anwendungen von besonderem Wert ist. Die Bearbeitung der entsprechenden Kurven vierter Ordnung nach denselben Methoden würde nicht allein gleiche Vorteile bieten, sondern auch wahrscheinlich eine beträchtliche Menge neuer Ergebnisse zu Tage fördern, da dieses Gebiet noch nicht so eingehend bearbeitet worden ist.

Digitized by Google

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOV 28 1896
SEP 1 1899
JUN 26 1902
FEB 27 1905
MAR 27 1906

Digitized by Google

Math 8588.95
Untersuchungen uber unikursalkurve
Cabot Science 003373853
3 2044 091 928 804

Digitized by Google